

**DAS „SU(2) COLOUR FLUX TUBE MODEL“
UND
DIE POLARISATIONSEIGENSCHAFTEN
DER STARKEN WECHSELWIRKUNG**

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR.RER.NAT.)
DER FAKULTÄT PHYSIK DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von
Annette S. Müller
aus Hamburg

Regensburg, den 15. April 2003

Promotionsgesuch eingereicht am : 15. April 2003

Die Arbeit wurde angeleitet von : Herrn Prof. Dr. A. Schäfer

Prüfungsausschuß : Prof. K. Renk, Prof. A. Schäfer,
Prof. E. Werner, Prof. U. Krey

Kolloquiumstermin : 6. Juni 2003

Meinen Eltern
gewidmet

NACH NEUEN MEEREN.

Dorthin – *will* ich; und ich traue
Mir fortan und meinem Griff.
Offen liegt das Meer, in's Blaue
Treibt mein Genueser Schiff.

Alles glänzt mir neu und neuer,
Mittag schläft auf Raum und Zeit –:
Nur *dein* Auge – ungeheuer
Blickt mich's an, Unendlichkeit!

Friedrich Nietzsche

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Abhängigkeit der Protonspinstrukturfunktion g_1 von der Kopplung in der Quantenchromodynamik quantitativ beschrieben. Zudem werden die anomale Unterdrückung in der axialen Flavour–Singulett–Komponente des ersten Moments Γ_1 der polarisierten Strukturfunktion des Protons und die Polarisations-eigenschaften der starken Wechselwirkung genauer analysiert. Für die Beschreibung wird das „*SU(2) colour flux tube model*“ im Formalismus der Diskretisierten Lichtkegelquantisierung (DLCQ) vorgeschlagen. Die Polarisation und Depolarisation der Gluonmaterie kann über Nullmodenstrukturen mit Lichtkegelimpuls $p^+ = 0$ erklärt werden. Die sogenannte dynamische Eichnullmode und die Zwangsnullmode liefern die Vakuumstruktur des Modells. Beide Nullimpulsmoden sind eng verknüpft mit der nichttrivialen Topologie des reinen $SU(2)$ –Yang–Mills–Vakuum sowie der Skalenvarianz der Quantenchromodynamik im axialen Flavour–Singulett–Kanal. Das Modell hat zwei Grundzustände von qualitativ unterscheidbarer Struktur. Im Hochenergiebereich dominiert das Potential der dynamischen Eichnullmode die Gluoneigenschaften. Gluonen verhalten sich wie Quasiteilchen mit effektiver Masse und ausgerichtetem Spin. Im Niedrigenergiebereich beherrscht das effektive Potential der Zwangsnullmode das Verhalten der Gluonen. Das Zwangspotential hat eine dem doppelten Oszillatorpotential ähnliche Gestalt. Gluonen werden zu stringartigen Singulett–Zuständen mit Spin Null. Alle Ergebnisse folgen aus den Bewegungsgleichungen der reinen Yang–Mills–Theorie in 2+1 Dimensionen. Es gibt keine Abhängigkeit von einem Faktorisationschema. Die numerischen Ergebnisse sind in Einklang mit den experimentellen Daten. Die Arbeit liefert einen neuen Beitrag zur Erklärung des Protonspinverteilungsproblems und dem Polarisationsmechanismus der Gluonmaterie.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Spinstrukturnäherung aus ersten Prinzipien	7
1.1 Die Operatorproduktentwicklung	7
1.2 Chiralität und Gluonanomalie in der QCD	13
1.2.1 Die Erhaltung der nichtsingulettten Axialvektorströme	14
1.2.2 Die Nichterhaltung des axialen Singulettstromes	17
1.3 Das Interpretationsproblem der Singulettladung	19
2 Das Yang–Mills–Vakuum	23
2.1 Die großen Eichtransformationen	23
2.2 Lokalisierte Quasiteilchen und Tunnelprozesse	26
2.3 Instantonen und die Stromquarks des Protons	31
2.4 Die Gaußsche Bewegungsgleichung	34
3 Die Lichtkegelquantisierung	35
3.1 Das Spinproblem aus der Sicht der DLCQ	35
3.2 Die Koordinaten und die Impulse	37
3.3 Die Dispersionsrelation	38
3.4 Die Lichtkegeloperatoren	38
3.5 Die Kompaktifizierung der Lichtkegeltheorie	40
4 Das Gluonmodell	42
4.1 Die Lagrangedichte	43
4.2 Die Nullimpulsmoden	45
4.3 Die Farb–Maxwell–Gleichungen	46
4.3.1 Die longitudinalen Gluonfelder	46
4.3.2 Das transversale Gluonfeld	47
4.4 Der Dirac–Bergmann–Formalismus	47

4.5	Die Eigenwertgleichung	52
4.5.1	Die Farbladung	53
4.5.2	Der Lichtkegelimpuls	53
4.5.3	Die Lichtkegelenergie	54
5	Zwangsnullmode und Polarisation	58
5.1	Die Struktur des gluonischen Vakuums	58
5.1.1	Skalenabhängigkeit	59
5.1.2	Der Eichanteil	60
5.1.3	Der Zwangsanteil	62
5.2	Das doppelte Oszillatorpotential	65
5.3	Die Zwei-Teilchennäherung	67
5.4	Quantenphasenübergang in der Gluonmaterie	70
	Resumé	86
A	Nichtstörungstheoretische Aspekte des Vakuums	89
A.1	Wigner-Weyl- und Nambu-Goldstone-Modus	89
A.2	Euklidische $SU(2)$ -Lösung	91
A.2.1	Das BPST-Instanton	91
A.2.2	Die Wirkung des doppelten Oszillatorpotentials	92
B	Ströme und Ladungen	93
B.1	Definitionen der Ladungen	93
B.2	Explizite Ausdrücke	93
B.3	Greensche Funktionen	96
C	Die Zwangsgleichung	98
C.1	Algebraische Umformungen	98
C.2	Transformation in den Impulsraum	99
D	Der Lichtkegelenergieoperator	103
D.1	Wechselwirkungsgraphen der <i>Contractions</i>	104
D.2	Wechselwirkungsgraphen der <i>Seagulls</i>	105
D.3	Wechselwirkungsgraphen der <i>Forks</i>	106
E	Die ausgeartete hypergeometrische Differentialgleichung	107
F	Die fortran-Programme	116

Einleitung

Ziel der Arbeit

Im Zusammenhang mit dem Protonspinverteilungsproblem und der anomalen Unterdrückung der axialen Singulettkomponente in der polarisierten Protonstrukturfunktion wird die Gluonpolarisation als wesentliches nichtstörungstheoretisches Charakteristikum im Proton untersucht. Der Polarisationsmechanismus wird in einem $SU_c(2)$ -Modell mit adjungierter Materie vom bosonischen Typ in 2+1 Dimensionen, dem *colour flux tube model*, im Hamiltonschen Formalismus der Diskretisierten Lichtkegelquantisierung (DLCQ) analysiert. Es wird gezeigt, daß der nicht erhaltene axiale Singulettstrom auf einem Vakuumeffekt beruht und von spezifischen Nullimpulsmoden beeinflusst wird, die mit dem Fockraum-Vakuum der Theorie koppeln. Die sogenannte dynamische Eichnullmode des longitudinalen Gluonfeldes und die Zwangsnullmode des transversalen Gluonfeldes liefern dabei die Substruktur des QCD-Vakuums, die mit der nichtabelschen Gruppentopologie verbunden ist und über eine Spin-Masse-Relation den axialen Singulettkanal dominiert. Auf diese Weise wird eine quantitative Beschreibung der Abhängigkeit der Protonspinstrukturfunktion von der Kopplung in der Quantenchromodynamik (QCD) möglich.

Motivation

Wie die Spinsubstruktur des Protons aus der Quantenchromodynamik, der $SU(3)$ -Farb-Yang-Mills-Theorie mit Quarks und Gluonen als dynamische Freiheitsgrade, erklärt werden kann, ist bisher nicht abschließend untersucht.

Daten aus polarisierten tiefinelastischen Lepton-Proton-Streuexperimenten zur Analyse der Substruktur des Protons zeigen, daß die polarisierte Strukturfunktion g_1 ¹ als Charakteristikum für die Spinverteilung im Proton eng verknüpft ist mit den nichtstörungs-

¹Die Strukturfunktion g_1 gibt die Dichtezahl und die Spinpolarisation der Quarks zu einem gegebenen Impulsbruchteil des Protongesamtimpulses an. Sie ist einer der Formfaktoren des Protons, der die Dynamik des tiefinelastischen Streuprozesses unter Berücksichtigung der Spinpolarisation beschreibt.

theoretischen Aspekten der QCD [1]–[11]. Bindungseffekte und langreichweitige Dynamik scheinen auch bei Reaktionen von hohen Impulsüberträgen ($Q \gg 1 \text{ GeV}$) im polarisierten Fall eine wesentliche Rolle zu spielen, so daß die in diesem Bereich gültige Feynman–Diagrammtechnik zur Beschreibung der Streuprozesse alleine nicht ausreicht. Dies steht im Gegensatz zu den unpolarisierten Strukturfunktionen des Protons, die über ein Ensemble nahezu masseloser freier Quarks interpretiert werden können [10].

Das zur polarisierten Strukturfunktion g_1 assoziierte erste Moment Γ_1 hat im Intervall kleiner Björken- x bei einem Viererimpulsübertrag $Q^2 = 10.7 \text{ GeV}^2$, d.h. im Bereich tiefinelastischer Streuung, einen signifikant kleineren Wert als in der Interpretation des Feynman–Parton–Modells [12, 13] mit freien nicht wechselwirkenden leichten Quarks erwartet wird [1, 5]:

$$\Gamma_1(x, Q^2) = \int_{0.01}^{0.7} dx g_1(x, Q^2) = 0.126 \pm 0.010 \pm 0.015 \quad .$$

Die Fehler geben in der Reihenfolge die statistische und die systematische Unsicherheit an. Im Feynman–Parton–Modell, in welchem die Spinsubstruktur des Protons mit einer punktähnlichen Konstituentendynamik in Abhängigkeit des Spins erklärt werden kann, wird das erste Moment der polarisierten Protonstrukturfunktion über die Quarkspindichtekomponenten definiert. Es ergibt sich für Γ_1 ein Wert von 0.185 ± 0.003 bei zu den oben erwähnten Messungen vergleichbaren x - und Q^2 -Werten [11].

Zum Verständnis dieser Abweichung kann ein erweitertes Parton–Modell unter Berücksichtigung einer Fermibewegung der einzelnen Quarks im Proton sowie das phänomenologische Quarkmodell [14]–[17] und erweiterte Versionen dazu (für einen Überblick siehe z.B. [18]), in denen das Proton als Bindungszustand dreier effektiver Konstituentenquark–Freiheitsgrade, d.h. zweier up -Quarks und einem $down$ -Quark (uud), beschrieben wird, wenig beitragen.

Die Abweichung zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert des ersten Moments wird vielmehr mit der axialen baryonischen Ladung $a^0(Q^2)$ als Komponente von Γ_1 in der Operator–Produkt– und Strom–Algebra–Formulierung [19] in Zusammenhang gebracht. In dieser Formulierung läßt sich Γ_1 ohne Berücksichtigung höherer störungstheoretischer QCD–Korrekturen wie folgt schreiben:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{9} a^0 + \frac{1}{12} \left(a^3 + \frac{1}{3} a^8 \right) \quad ,$$

mit a^0 als Axialladung des Singulettkanals und a^3 bzw. a^8 als Axialladungen des Triplett– bzw. Oktettkanals. Die Axialladungen werden über die Vorwärtsmatrix der axialen Ströme $J_{5\mu}^i$ ($i = 0, 3, 8$) definiert [19]. Im Feynman–Parton–Modell gilt $a^0 = a^8$, und es ergibt sich in Einklang mit der Ellis–Jaffe–Summenregel [20] der obige Wert von $\Gamma_1 = 0.185$.

Es zeigt sich aber, daß $a^0(Q^2)$ kein fester Wert im Sinne eines Stromdichteoperators ist

und aufgrund eines anomalen gluonischen Beitrags im Vergleich zur Axialladung a^8 des Oktettkanals unterdrückt ist. Die Verletzung, d.h. $a^0(Q^2) \neq a^8$, bedingt, daß Gluonen zur Protonspinverteilung beitragen können. Der Gesamtquarkspin im Proton stimmt daher nicht mit der axialen baryonischen Ladung im Sinne des Feynman–Parton–Modells überein. Mit dem Protonspinverteilungsproblem stellt sich die Frage nach dem Ursprung der Unterdrückung der Singulettkomponente $a^0(Q^2)$ und im Zusammenhang damit die Frage nach den Polarisationsseigenschaften der starken Wechselwirkung.

Bisher liegt ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den mikroskopischen Variablen, den Quarks und Gluonen, der QCD–Lagrangedichte und den makroskopischen, beobachtbaren Variablen, den Hadronen, hinsichtlich der Spinsubstruktur noch nicht vor.

Im störungstheoretisch zugänglichen Mechanismus der Photon–Gluon–Fusion ist eine Gluonverteilung in Γ_1 vom Faktorisierungsschema abhängig [21]–[25]. Im chiral-invarianten Faktorisierungsschema, in welchem der Ultraviolett–Regulator die chirale Symmetrie erfüllt, wird die Gluonverteilung durch einen unabhängigen Anomalieterm beschrieben. Im eichinvarianten Schema ist die Eichsymmetrie erhalten, die chirale Symmetrie aber durch den *cutoff* gebrochen. Die Gluonverteilung ist in den spinabhängigen Quarkverteilungen der Operatorproduktentwicklung enthalten.

Eine Abhängigkeit von dem Faktorisierungsschema einerseits und dem Photon–Gluon–Fusionsprozeß andererseits gilt auch für das nichtlokal formulierte eichinvariante Schema. Hier werden Twist–2–Partonverteilungsfunktionen als normierte Fourier–Transformationen der Nukleonmatrixelemente nichtlokaler QCD–Operatoren verwendet [26]. Die nichtlokalen Operatoren werden als eichinvariante Überlappung zweier Quark– oder Gluonfelder konstruiert, die über lichtartige Abstände getrennt sind. Die ersten Koeffizienten der Taylor–Entwicklung der nichtlokalen Matrixelemente um den Ursprung werden mit Hilfe der Matrixelemente der lokalen niedrigdimensionalen Twist–2–Operatoren bestimmt.

Für die polarisierte tiefinelastische Streuung, die im Gegensatz zum unpolarisierten Fall nicht vom Vektorkanal, sondern vom Axialvektorkanal dominiert wird, sind die Ergebnisse des störungstheoretischen Anomaliemechanismus nicht eindeutig [11]. Der Mechanismus der Photon–Gluon–Fusion scheint für den polarisierten Fall fraglich zu sein [27].

Neue phänomenologische Analyseverfahren zur Untersuchung der Protonspinsubstruktur basierend auf Summenregeltechniken wurden von Narison, Shore und Veneziano [28]–[30] sowie Halperin und Zhitnitsky [27, 31] entwickelt. In diesen Ansätzen wird der experimentelle Wert des ersten Moments Γ_1 bzw. die Unterdrückung von $a^0(Q^2)$ aufgrund eines topologischen Ladungsscreening–Effekts des QCD–Vakuums unabhängig vom Target erklärt. Allerdings tauchen hier die Schwierigkeiten auf, daß die Protonspinverteilung entweder über unbekannte Größen ausgedrückt werden muß, die nicht direkt meßbar sind, oder auf Aussagen zur inneren *charm*–Erzeugung beruht, die aufgrund der nicht ausrei-

chenden Kenntnisse kubischer Kondensate der reinen Gluondynamik mit einer großen Unsicherheit behaftet sind. Zudem wird der Mechanismus der Polarisierung in der starken Wechselwirkung nicht geklärt.

Signifikante Fortschritte zum Verständnis der Substruktur im Proton wurden im wesentlichen in der euklidischen Formulierung der QCD unter Verwendung von numerischen Monte-Carlo-Simulationen der Gittereichtheorie [32]–[35] oder über die Analyse klassischer Feldkonfigurationen der nichtabelschen Yang-Mills-Theorie, wie Instantonen, Caloronen und Monopolen etc. [36, 37] gewonnen.

Aktuelle Ergebnisse zur Substruktur des Vakuums liefern die Gittereichsimulationen von Gattringer [38]. Sie zeigen, daß das QCD-Vakuum von komplexer Substruktur in Einklang mit den klassischen Kraan-van Baal-Lösungen der $SU(N)$ -Yang-Mills-Gleichungen bei endlicher Temperatur ist [37].

Ein Wechselwirkungs- und Polarisationsmechanismus von Quarks und Gluonen, in dem die direkte Übertragung der Helizität der Valenzquarks im Proton auf die Gluonen beschrieben werden kann, wurde von 't Hooft formuliert [39]. Die Instanton-Wechselwirkung ist allerdings trotz zahlreicher in der euklidischen Raum-Zeit formulierter Ergebnisse für eine Vielzahl hadronischer Kanäle, hadronischer Wellenfunktionen und Formfaktoren nicht in die Minkowskische Raum-Zeit als wesentlicher Schritt zum Verständnis hadronischer Hochenergieprozesse übersetzt [40, 41].

In dieser Arbeit wird daher unter Verwendung der Lichtkegelquantisierung mit Regulator in Form diskreter longitudinaler Impulse, der sogenannten Diskretisierten Lichtkegelquantisierung (DLCQ), für die Erklärung der Protonspinverteilung ein anderer Zugang gewählt.

Die DLCQ ist eine Hamiltonsche Formulierung der Quantenfeldtheorie in Lichtkegelkoordinaten mit periodischen Randbedingungen. Sie ermöglicht die Berechnung von Wellenfunktionen und Spektren hadronischer Teilchen für alle Kopplungsstärken. Die kanonischen (Anti-) Kommutatorrelationen werden bei gleicher Lichtkegelzeit aufgestellt; alle relevanten Operatoren konstruiert man in der Impulsraumdarstellung.

Angewandt wurde die DLCQ zum ersten Mal 1985 von Pauli und Brodsky [42, 43] auf die Quantisierung der Yukawa-Theorie mit skalaren Bosonen als Vermittler in einer Raum- und einer Zeitdimension. Sie liefert mit der euklidischen Raum-Zeit-Quantisierung übereinstimmende Lösungen. Seitdem wurde die Methode erfolgreich zur Berechnung der Spektren und Wellenfunktionen sowohl für die Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik in einer Raum- und einer Zeitdimension [44]–[47] als auch für das Positronium-Spektrum für große Kopplungskonstanten in drei Raum- und einer Zeitdimension [48]–[50] weiterentwickelt und getestet.

Die Entwicklung in Lichtkegelvariablen und die Quantisierung auf dem Lichtkegel gründet

sich darauf, daß sich in relativistischen Theorien der Begriff der Zeit verallgemeinern läßt. Nach einem Vorschlag von Dirac 1949 kann die Lichtkegelzeit als Raumzeitentwicklungsparameter des Hamiltonoperators verwendet werden [51]. Das physikalische Lichtkegelvakuum ist in der von Dirac als *front form* bezeichneten Darstellung das Fockraum-Vakuum. Das Vakuum auf dem Lichtkegel ist allerdings nicht so einfach strukturiert wie es erscheint. Spezifische Nullmodenanregungen mit Lichtkegelimpuls $p^+ = 0$ können mit dem Lichtkegelvakuum koppeln und die komplexe Struktur des QCD-Vakuums rekonstruieren. Die Struktur des Vakuums läßt damit eine konsistente Vereinigung des Konstituenten-Quarkmodells mit dem Feynman-Parton-Modell und der Quantenchromodynamik erhoffen.

Diese Arbeit untersucht Nullimpulsmoden-Kopplungen mit dem Fockraum-Vakuum in einem Modell, das Gluon-Gluon-Paare in ausgedehnten longitudinalen Dimensionen und eingeschränkten transversalen Dimensionen unter Beibehaltung des Spinfreiheitsgrades beschreibt, um dem Ursprung der Gluonpolarisation und Spinverteilung im Proton näher zu kommen.

Die Vermutung, daß Vakuumstrukturen und Nullimpulsmoden in engem Zusammenhang stehen könnten, gründet sich auf der strukturellen Ähnlichkeit der Vierpunktwechselwirkung von Gluonen mit der Φ^4 -Theorie [36]. In dieser Theorie konnten Bender, Pinsky und van de Sande spontane Symmetriebrechung und Vakuumkondensation durch nicht dynamische Zwangsnullimpulsmoden in der DLCQ erklären [52, 53].

Vorgehensweise

In Kapitel 1 wird mit Hilfe der lokalen Operatorproduktentwicklung und den Stromalgebrenmethoden die Nichterhaltung des Singulettstroms im axialen Kanal aufgrund spezifischer Gluoneichfeldkonfigurationen erläutert. Zudem werden die aktuellen Überlegungen zur Unterdrückung der axialen Singulettladung von Narison, Shore und Veneziano sowie Halperin und Zhitnitsky und ihre Problematik dargestellt.

Gegenstand des zweiten Kapitels ist die Verknüpfung topologischer Konfigurationen mit dem 't Hooftschen Wechselwirkungsmechanismus zwischen Singulettstrom und Gluonen. Dabei wird die direkte Übertragung der Helizität der Valenzquarks im Proton auf die Gluonen und die Bildung von Gluonkondensaten diskutiert und der neue Zugang für die Erklärung der Unterdrückung der axialen Singulettladung aufgezeigt. Der Formalismus der DLCQ wird in Kapitel 3 vorgestellt.

Der Zusammenhang zwischen euklidischer Formulierung und Lichtkegelquantisierung wird mit Hilfe der Gaußschen Gleichung in Kapitel 4 hergestellt. Die klassisch euklidischen Instantonlösungen werden mit der gluonischen Zwangsnullimpulsmoden der Theorie in Ana-

logie gesetzt und die Bewegungsgleichung des die Zwangsnullimpulsmode enthaltenden Skalarfeldes gelöst.

Die polarisierende Eigenschaft der Eichnullimpulsmode auf das reine Gluonspektrum im schwachen Kopplungslimes und der depolarisierende Einfluß der Zwangsnullimpulsmode zum starken Kopplungslimes hin werden in Kapitel 5 analysiert. Die Gluonspektren zu unterschiedlicher Einflußstärke der Zwangsnullimpulsmode werden über die Diagonalisierung des Lichtkegel-Hamiltonoperators der Gluontheorie gewonnen. Aus der Energiedifferenz, die zwischen den jeweiligen Grundzuständen des Hoch- und Niedrigenergiebereichs auftritt, wird die Tunnelrate und damit die Gluonpolarisation extrahiert.

Im Resumé werden die Ergebnisse zusammengefaßt und ein Ausblick gegeben. Mathematische und technische Details zu den einzelnen Kapiteln sind in den Anhängen A bis F festgehalten.

Kapitel 1

Spinstrukturnäherung aus ersten Prinzipien

1.1 Die Operatorproduktentwicklung

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die theoretische Herleitung der polarisierten Strukturfunktion g_1 und des ersten Moments Γ_1 als charakteristische Größen der Protonspinverteilung in der Operatorproduktentwicklung (OPE) nach Wilson [19].

Die OPE ist eine Näherung für hochenergetische tiefinelastische Lepton–Nukleon–Streu-
prozesse aus ersten Prinzipien. Annahme dabei ist, daß die Momente der Strukturfunk-
tionen und die Vorwärtsmatrixelemente lokaler eichinvarianter Operatoren über geeignete
Quantenzahlen zueinander in Beziehung stehen [54].

Betrachtet wird zunächst das Strom–Matrixelement zwischen dem Proton–Anfangszu-
stand und einem beliebigen hadronischen Endzustand X

$$\langle X | J_\mu(x) | p, s \rangle = \langle X | J_\mu(0) | p, s \rangle e^{-i(p-p')x} \quad (1.1)$$

im Minkowski–Raum mit der Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. p_μ ist der Viererimpuls,
 s_μ die Spinpolarisation des Protons und p'_μ der Viererimpuls des Endzustandes X .

Erfolgt der Streuprozess in erster Linie über den Austausch eines Photons und ist der des
 Z –Bosons vernachlässigbar, so ist die Wechselwirkung elektromagnetisch, und der Strom
 J_μ kann definiert werden als

$$J_\mu = \sum_{j,q,q'} : \bar{q}_j \gamma_\mu Q_e q'_j : \quad , \quad (1.2)$$

wobei γ_μ die Dirac–Matrizen, q, q' die Quarkfelder vom Flavour $q = u, d, s, c, b, t$ sind und
 j ($= 1, 2, 3$) der Farbindes ist. Die Ladungsmatrix der Quarks im Flavourraum hat die

Gestalt

$$Q_e = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Nach Quadrierung von (1.1), Summation über alle hadronischen Endzustände X , Berücksichtigung der Energie–Impuls–Erhaltung und der Translationsinvarianz ergibt sich

$$\sum_X \langle p, s | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\mu(0) | p, s \rangle (2\pi)^3 \delta^4(p' - p - k) \quad , \quad (1.4)$$

mit k als Viererimpuls des koppelnden Photons. Dieser Ausdruck entspricht dem inklusiven Hadrontensor $W_{\mu\nu}(k; p, s)$, der sich aus dem inklusiven differentiellen Streuquerschnitt des neutralen Stromprozesses $l P \rightarrow l' X$ an einem Proton P , mit l und l' als Leptonen und X als alle möglichen hadronischen Endzustände, extrahieren und mit Hilfe von Struktur–funktionen parametrisieren läßt. Unter Verwendung der Integraldarstellung

$$\delta^4(p' - p - k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-i(p' - p - k)x} \quad (1.5)$$

und der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_X | X \rangle \langle X | = I \quad (1.6)$$

erhält man aus (1.4)

$$W_{\mu\nu}(k; p, s) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{ikx} \langle p, s | J_\mu(x) J_\nu(0) | p, s \rangle \quad . \quad (1.7)$$

Da das Proton neben dem Neutron der energetisch niedrigste Zustand mit Baryonzahl 1 ist, gilt für den Ausdruck

$$\int d^4x e^{ikx} \langle p, s | J_\nu(0) J_\mu(x) | p, s \rangle = 0 \quad , \quad (1.8)$$

und der Hadrontensor läßt sich als Fourier–Transformation der Proton–Matrixelemente des Kommutators zweier elektromagnetischer Ströme schreiben als

$$W_{\mu\nu}(k; p, s) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{ikx} \langle p, s | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | p, s \rangle \quad . \quad (1.9)$$

Zudem kann der Hadrontensor in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil aufgespalten werden [10, 55]

$$W_{\mu\nu}(k; p, s) = W_{\mu\nu}^S + iW_{\mu\nu}^A \quad . \quad (1.10)$$

$W_{\mu\nu}^{\mathcal{S}}$ ist der symmetrische Anteil des Hadrontensors, der sich aus den spinunabhängigen Strukturfunktionen zusammensetzt. $W_{\mu\nu}^{\mathcal{A}}$ ist der antisymmetrische Anteil. Aus ihm lassen sich die spinabhängige über longitudinalpolarisierte Streuprozesse ermittelbare Strukturfunktion $g_1(x, Q^2)$ und die polarisierte Strukturfunktion $g_2(x, Q^2)$, die man bei transversaler Polarisation des Protons erhält, ableiten (siehe [10, 55]). Für die Charakterisierung der Protonspinverteilung ist in erster Linie der dominante $g_1(x, Q^2)$ -Beitrag entscheidend. Die Tensoren $W_{\mu\nu}^{\mathcal{S}}$ und $W_{\mu\nu}^{\mathcal{A}}$ können nach dem optischen Theorem (siehe [56]) über die Diskontinuität der symmetrischen und antisymmetrischen Anteile der Vorwärts-Compton-Streuamplitude gemäß

$$W_{\mu\nu}^{\mathcal{S},\mathcal{A}} = \frac{1}{\pi} \text{Im } T_{\mu\nu}^{\mathcal{S},\mathcal{A}} \quad (1.11)$$

ermittelt werden. Die Vorwärts-Compton-Streuamplitude, die elektromagnetische Strom-Korrelatorfunktion, ist definiert als

$$T_{\mu\nu}(k; p, s) = T_{\mu\nu}^{\mathcal{S}} + iT_{\mu\nu}^{\mathcal{A}} = i \int d^4x e^{ikx} \langle p, s | T J_\mu(x) J_\nu(0) | p, s \rangle \quad (1.12)$$

Für das \hat{T} -Matrixelement der Compton-Streuung eines virtuellen Photons in Vorwärtsrichtung gilt

$$\langle p, s; k, \lambda' | \hat{T} | p, s; k, \lambda \rangle = 4\pi\alpha \epsilon_\mu^*(\lambda') T^{\mu\nu} \epsilon_\nu(\lambda) \quad (1.13)$$

α ist dabei die Feinstrukturkonstante, ϵ_μ der Polarisationsvektor, λ und λ' sind die Helizitäten des virtuellen Photons mit Viererimpuls k , und für den \hat{T} -Operator gilt die Konvention

$$\hat{S} = \hat{I} + i(2\pi)^2 \delta^4(p_f - p_i) \hat{T} \quad (1.14)$$

mit \hat{S} als Streumatrixelement und \hat{I} als Identitätsoperator. Das Verhalten von $T_{\mu\nu}$ bzw. $W_{\mu\nu}$ wird im tiefeinelastischen Limes unter Annahme der inklusiven Natur der Streureaktion durch das singuläre Verhalten des Produkts der Ströme nahe dem Lichtkegel $x^2 \sim 0$ bestimmt und nicht durch $x^\mu \sim 0$ (siehe [57]). Das singuläre Verhalten kann mit Hilfe der OPE bei lichtartigen Abständen beschrieben werden. Dazu wird das Produkt der beiden Stromoperatoren aus (1.7) nach Wilson [19, 54, 55] in eine unendliche Reihe normalgeordneter lokaler Hermitescher Operatoren auf dem Lichtkegel entwickelt

$$\lim_{x^2 \rightarrow 0} i T(J_\mu(x) J_\nu(0)) = \sum_{j,n} C_n^j(x^2) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} O_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) \quad (1.15)$$

mit $O_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(0)$ als Basis spurloser symmetrischer Tensoren bzgl. n Lorentz-Indices und $C_n^j(x^2)$ als c -Zahlfunktionen oder Wilson-Koeffizienten. Die Tensoren $O_j^{\mu_1 \dots \mu_n}(0)$ sind irreduzible Tensoren von Spin n . Die Gleichung (1.15) hat für den tiefeinelastischen Streuprozess Gültigkeit, da die Dynamik von dem Lichtkegelverhalten der Feldprodukte dominiert wird [58]. Nimmt man die Skaleninvarianz als approximative Symmetrie bei kurzen

Abständen an, so erhält man das führende Verhalten der Koeffizientenfunktionen C_n^j für kleine Werte von x in Termen der Skalendimensionen der Operatoren. Nach der Dimensionsanalyse folgt für den Zusammenhang zwischen dem Verhalten bei kurzen Abständen und dem auf dem Lichtkegel

$$C_n^j(x^2) = (x^2)^{(d_j - n_j - d_J - d_{J'})/2} + \text{höhere Ordnungen in } x^2 \quad . \quad (1.16)$$

d_j , d_J und $d_{J'}$ sind die Skalendimensionen der Operatoren O_j , J_μ und J_ν ; n_j ist der Spin des Operators O_j . Der Grad der Singularität auf dem Lichtkegel ist daher durch

$$\tau_j = d_j - n_j \quad , \quad (1.17)$$

den Twist-Operator, bestimmt. Die führende Singularität auf dem Lichtkegel ist die der Operatoren mit kleinstem Twist.

Die führenden Twistbeiträge des antisymmetrischen Anteils der Fourier-Transformation des Operatorprodukts aus (1.15) lassen sich in Termen der OPE gemäß

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^A &= \left[i \int d^4x e^{ikx} T(J(x)J(0)) \right]^A \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho \left(\frac{2}{Q^2} \right)^n k_{\mu_1} \dots k_{\mu_{n-1}} \sum_j 2 \delta_j C_n^j(Q^2, g) O_{j,A}^{\sigma\{\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

entwickeln, mit g als QCD-Kopplungskonstante und δ_j als Ladung und isotopische Spinstruktur der Ströme. Die Summe \sum_j geht über alle Quark- und Gluonenoperatoren mit führendem Twist. Der Index j ist hier $j = 0, a, G$. Die Operatoren mit $a = 1, \dots, 8$ transformieren wie ein $SU(3)$ -Flavour-Oktett und die mit 0 und G wie ein Flavour-Singulett. Für den elektromagnetischen Stromkommutator in (1.9) gilt $\delta_0 = \delta_G = \frac{2}{9}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}$, $\delta_8 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ und für alle anderen $\delta_j = 0$.

Die obigen Axialvektoroperatoren können in total symmetrische und gemischt symmetrische Anteile zerlegt werden

$$O_{j,A}^{\sigma\{\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} = O_{j,A}^{\{\sigma\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} + O_{j,A}^{[\sigma\mu_1]\{\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} \quad . \quad (1.19)$$

$\{\dots\}$ steht für eine Symmetriesierung und $[\dots]$ für eine Antisymmetriesierung in den Indices. Die totalsymmetrischen Anteile sind die Operatoren von Twist 2 ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$O_{j,A}^{\{\sigma\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} = \frac{1}{n} \left[O_{j,A}^{\sigma\{\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} + O_{j,A}^{\mu_1\{\sigma\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} + O_{j,A}^{\mu_2\{\mu_1\sigma \dots \mu_{n-1}\}} + \dots \right] , \quad (1.20)$$

die gemischt symmetrischen Anteile sind die Operatoren von Twist 3 ($n = 3, 5, \dots$)

$$\begin{aligned} O_{j,A}^{[\sigma\mu_1]\{\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} &= \frac{1}{n} \left[O_{j,A}^{\{\mu_1\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} - O_{j,A}^{\mu_1\{\sigma\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} \right. \\ &\quad \left. + O_{j,A}^{\sigma\{\mu_2\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} - O_{j,A}^{\mu_2\{\mu_1\sigma \dots \mu_{n-1}\}} + \dots \right] . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Die Operatoren aus (1.20) werden als Quark- und Gluonenoperatoren von Twist 2 definiert

$$\begin{aligned} O_{k,A}^{\{\sigma\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \bar{q} \gamma^\sigma \{D^{\mu_1} \dots D^{\mu_{n-1}}\} \lambda_k \gamma_5 q \quad (n \geq 1), \\ O_{G,A}^{\{\sigma\mu_1 \dots \mu_{n-1}\}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \text{Sp}(\epsilon^{\sigma\alpha\beta\gamma} G_{\beta\gamma} \{D^{\mu_1} \dots D^{\mu_{n-2}} G_{\alpha}^{\mu_{n-1}}\}) \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (1.22)$$

λ_k beinhaltet die Gell-Mann-Matrizen λ_a und die Nullkomponente $\frac{\lambda_0}{2} = \mathbf{1}$, D^μ ist die kovariante Ableitung und $G_{\mu\nu}$ der Gluonfeldstärketensor.

Die Protonmatrixelemente der Operatoren aus (1.20) und (1.21) werden unter Verwendung der reduzierten Matrixelemente a_n^j und d_n^j geschrieben als

$$\begin{aligned} \langle p, s | O_{j,A}^{\{\sigma\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} | p, s \rangle &= \frac{a_n^j}{n} (s^\sigma p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{n-1}} + s^{\mu_1} p^\sigma \dots p^{\mu_{n-1}} + \dots) \\ \langle p, s | O_{j,A}^{[\sigma\mu_1]\{\mu_2 \dots \mu_{n-1}\}} | p, s \rangle &= \frac{d_n^j}{n} \left[(s^\sigma p^{\mu_1} - s^{\mu_1} p^\sigma) p^{\mu_2} \dots p^{\mu_{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + (s^\sigma p^{\mu_2} - s^{\mu_2} p^\sigma) p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{n-1}} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die Matrixelemente a_n^j und d_n^j repräsentieren den nichtstörungstheoretischen Aspekt der Dynamik. Parametrisiert man den antisymmetrischen Anteil $T_{\mu\nu}^A$ der Compton-Streumplitude aus (1.12) in Analogie zum antisymmetrischen Anteil $W_{\mu\nu}^A$ des Hadrontensors (siehe [10, 55]), so erhält man

$$T_{\mu\nu}^A = \langle p, s | t_{\mu\nu}^A | p, s \rangle = i\tilde{g}_1(\omega) \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho s^\sigma M}{p \cdot k} + i\tilde{g}_2(\omega) \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p \cdot k s^\sigma - s \cdot k p^\sigma) M}{(p \cdot k)^2}, \quad (1.24)$$

mit \tilde{g}_1 und \tilde{g}_2 als polarisierte Strukturfunktionen der analytischen Fortsetzung von $t_{\mu\nu}^A$ in die komplexe Ebene und $\omega = \frac{2p \cdot k}{Q^2} \sim 0$. Ein Vergleich mit Gleichung (1.18) und unter Berücksichtigung von Gleichung (1.23) führt zu

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(\omega) &= \sum_{n=1,3,\dots} \sum_j 2 \delta_j C_n^j a_n^j \omega^n \\ \tilde{g}_2(\omega) &= \sum_{n=1,3,\dots} \sum_j \left[\left(\frac{1-n}{n}\right) 2 \delta_j C_n^j a_n^j \omega^n + \left(\frac{n-1}{n}\right) 2 \delta_j C_n^j d_n^j \omega^n \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Bringt man die Gleichungen (1.25) auf die Form

$$\tilde{g}_2(\omega) = -\tilde{g}_1(\omega) + \int_0^\omega \frac{d\omega'}{\omega'} \tilde{g}_1(\omega') + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{n-1}{n}\right) 2 \delta_j C_n^j d_n^j \omega^n \quad (1.26)$$

und verwendet die Dispersionsrelationen, um die Werte von $\tilde{g}_{1,2}$ aus dem nicht physikalischen Bereich ($\omega \sim 0$) mit jenen der Strukturfunktionen $g_{1,2}$ des physikalischen Bereichs

($1 < \omega < \infty$) zu verbinden, so führt dies zu den Summenregeln der ungeraden Momente

$$\Gamma_1^n(x, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_j \delta_j C_n^j a_n^j, \quad n = 1, 3, \dots, \quad (1.27)$$

$$\Gamma_2^n(x, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} g_2(x, Q^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-n}{n} \right) \sum_j \delta_j C_n^j (a_n^j - d_n^j), \quad n = 3, 5, \dots$$

Γ_1 bzw. g_1 sind über das Protonmatrixelement zweier elektromagnetischer Ströme bestimmbar, die einen großen raumähnlichen Impuls tragen. Für $n = 1$ folgt nach (1.22)

$$O_{k,A}^\sigma = J_{5\mu}^k = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma^\sigma \lambda_k \gamma_5 q \quad . \quad (1.28)$$

Nach Ersetzung in (1.23) und unter Berücksichtigung der δ_j ergeben sich für $n = 1$ die Vorwärtsmatrixelemente der Axialvektorströme $J_{5\mu}^j$, die den antisymmetrischen Anteil des Hadrontensors bestimmen,

$$\langle p, s | J_{5\mu}^0 | p, s \rangle = a_1^0 s_\mu = a^0 s_\mu \quad , \quad (1.29)$$

$$\langle p, s | J_{5\mu}^3 | p, s \rangle = a_1^3 s_\mu = \frac{1}{2} a^3 s_\mu \quad , \quad (1.30)$$

$$\langle p, s | J_{5\mu}^8 | p, s \rangle = a_1^8 s_\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} a^8 s_\mu \quad . \quad (1.31)$$

Das erste Moment kann somit für $n = 1$ in Termen der reduzierten Matrixelemente a_1^k bzw. der sogenannten Axialladungen des Protons a^k unabhängig von einer Partonverteilungsformulierung geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Gamma_1^1 = \Gamma_1 &= \int_0^1 dx g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \delta_0 C_1^0 a_1^0 + \frac{1}{2} \delta_3 C_1^3 a_1^3 + \frac{1}{2} \delta_8 C_1^8 a_1^8 \\ &= \frac{1}{9} C_s a^0 + \frac{1}{12} C_{NS} \left(a^3 + \frac{1}{3} a^8 \right) \quad , \end{aligned} \quad (1.32)$$

wobei $C_s = C_1^0$ als Wilson-Koeffizient für den Flavoursingulett-Anteil und $C_{NS} = C_1^3 = C_1^8$ als Wilson-Koeffizient für den nichtsingulettten Anteil bezeichnet wird. Die Wilson-Koeffizienten $C_{NS(s)} = 1 - g/\pi + \dots$ können störungstheoretisch berechnet werden [59].

Da die betrachtete Theorie nicht frei und der Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ nicht mit dem Limes $g \rightarrow 0$ identisch ist, sind die Matrixelemente aus (1.29)–(1.31) von der Renormierungsskala μ_{QCD} abhängig, wenn der jeweilige axiale Stromoperator nicht erhalten ist.

Inwieweit die Axialvektorströme $J_{5\mu}^0, J_{5\mu}^3$ und $J_{5\mu}^8$ von der Renormierungsskala abhängen bzw. erhalten sind, kann über die für die leichten Flavours ($m_u, m_d < \Lambda_{QCD}$) und den *strange* Flavour ($m_s \sim \Lambda_{QCD}$) approximativ auftretende globale chirale Symmetrie auf Quantenniveau ermittelt werden. Λ_{QCD} steht für die Hadronskala, welche die durch Quanteneffekte gebrochene Skaleninvarianz der QCD ausdrückt. Zudem ist bei der Erhaltung bzw. Nichterhaltung der axialen Flavourströme die Topologie des QCD-Vakuums von Bedeutung. Die Skalenabhängigkeit verknüpft mit der Topologie des QCD-Vakuums erschwert die Substrukturbeschreibung des Protonspins über das Partonbild.

1.2 Chiralität und Gluonanomalie in der QCD

Die chirale Symmetrie kann über sogenannte Stromalgebra-Methoden analysiert werden. Diese gehen, ohne auf phänomenologische Quarkmodelle der Hadronstruktur zurückgreifen zu müssen, direkt von der Lagrangedichte der QCD mit den Quarks und Gluonen aus und verbinden diese mit beobachtbaren Größen. Eine gemeinsame Symmetrieuntersuchung wird sowohl in der Quark-Gluon-Phase bei kleinen Abständen sowie der Baryon-Meson-Phase bei großen Abständen möglich. Der mikroskopische dynamische Mechanismus, durch den beide Phasen ineinander übergehen, muß dabei nicht bekannt sein; allein die Symmetrieüberlegungen sind entscheidend.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist die volle Lagrangedichte der QCD in chiraler Schreibweise ohne Berücksichtigung der schwachen Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{chiral} - \sum_j \bar{q}_{L_j} \mathcal{M} q_{R_j} - \sum_j \bar{q}_{R_j} \mathcal{M} q_{L_j} + \mathcal{L}_{cvt} \quad . \quad (1.33)$$

\mathcal{L}_{chiral} ist die „ungestörte“ Lagrangedichte ohne innere Massenparameter. Die phänomenologische Größe \mathcal{M} ist die diagonale Massenmatrix im Flavourraum mit den nicht beobachtbaren, aber über Stromalgebra-Methoden definierbaren Masseneigenwerten der leichten Flavours und dem *strange* Flavour. \mathcal{L}_{cvt} ist die Lagrangedichte für die schweren Flavours ($m_q > \Lambda_{QCD}$). Diese lassen sich nach dem Appelquist-Carazzone-Entkopplungstheorem abspalten [60]. Die Hadronmassen entstehen durch dimensionale Transmutation. Alle Effekte der schweren Flavourteilchen erscheinen in den Teilchen mit leichtem und *strange* Flavour durch Renormierung oder durch Korrekturen proportional einer negativen Potenz der schweren Flavourmassen. Die chirale Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{chiral} = \sum_{q,j,k} i \bar{q}_{L_j} \gamma^\mu (D_\mu)_{jk} q_{L_k} + \sum_{q,j,k} i \bar{q}_{R_j} \gamma^\mu (D_\mu)_{jk} q_{R_k} - \frac{1}{2} \text{Sp} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \quad (1.34)$$

ist der idealisierte Limes für die chirale Symmetrie, die der ungestörten Theorie entspricht. Die q_L und q_R sind die links- und rechtshändigen Quarkfelder, die als Farbtripletts ($j = 1, 2, 3$) in den Flavourzuständen $q = u, d, s$ auftreten. Diese ergeben sich durch Anwendung der Projektionsoperatoren $\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ auf die Quarkfelder gemäß $\mathcal{P}_\pm q =: q_\pm \equiv q_{L,R}$. $D_\mu = \partial_\mu + [G_\mu, \dots]$ ist die kovariante Ableitung der vektoriellen Eichfelder G_μ . Für den Gluontensor gilt

$$G_{\mu\nu} = \sum_a T_a G_{\mu\nu}^a \quad , \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad . \quad (1.35)$$

$T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ sind die spurlosen hermiteschen Erzeugenden der fundamentalen Darstellung

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (a, b, c = 1, 2, 3, \dots, 8) \quad (1.36)$$

der $SU(3)$ -Symmetriegruppe mit den Strukturkonstanten f_{abc} und den Gell-Mann-Matrizen λ_a , wobei der Index a in diesem Zusammenhang die acht Generatoren der $SU_c(3)$ -Farbsymmetrie symbolisiert.

1.2.1 Die Erhaltung der nichtsingulekten Axialvektorströme

Geht man von dem masselosen Fall aus, so ist die chirale Lagrangedichte aus (1.34) auf Quantenniveau invariant unter der globalen linearen $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U(1)$ -Symmetrie in der Quark-Gluon-Phase, mit den zwei separaten speziellen unitären Transformationsgruppen

$$SU_L(3) : q_L \rightarrow U_L q_L \quad \text{und} \quad SU_R(3) : q_R \rightarrow U_R q_R \quad , \quad (1.37)$$

wobei $U_L = e^{-i\omega_L^a T^a}$ und $U_R = e^{-i\omega_R^a T^a}$ ist. T^a bezieht sich hier auf den Flavourraum, und der Index a ist der Index für die acht Generatoren der $SU(3)$ -Flavoursymmetrie. Für die globale Symmetriegruppe hat man

$$U(1) : q_{L,R} \rightarrow e^{-i\alpha} q_{L,R} \quad . \quad (1.38)$$

Aus der $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U(1)$ -Symmetrie können 17 Noether-Ströme konstruiert werden. Dazu wird die chirale Schreibweise der zweikomponentigen Weyl-Spinore in die vektorielle und axiale Kombination der vollen vierkomponentigen Dirac-Spinore gemäß $V = L + R$ und $A = L - R$ umgeschrieben. In dieser Schreibweise erhält man die Transformationen

$$q \rightarrow e^{-i\omega_V^a T^a} q \quad , \quad q \rightarrow e^{-i\gamma_5 \omega_V^a T^a} q \quad , \quad q \rightarrow e^{-i\omega_V} q \quad , \quad (1.39)$$

mit den assoziierten Noether-Strömen

$$J_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu T^a q \quad , \quad J_{5\mu}^a = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 T^a q \quad , \quad J_\mu = \bar{q} \gamma_\mu q \quad . \quad (1.40)$$

Für die Ströme gilt im chiralen Limes

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0 \quad , \quad \partial^\mu J_{5\mu}^a = 0 \quad , \quad \partial^\mu J_\mu = 0 \quad , \quad (1.41)$$

und es können die Ladungen

$$Q^a = \int d^3x J_0^a \quad , \quad Q_5^a = \int d^3x J_{50}^a \quad , \quad Q_0 = \int d^3x J_0 \quad (1.42)$$

definiert werden. J_μ^a und $J_{5\mu}^a$ sind die im chiralen Limes erhaltenen Flavourströme bzw. chiralen Flavourströme. J_μ ist der Baryonstrom, der in der vollen Theorie erhalten ist.

Da im hadronischen Spektrum der Quarkbindungszustände keine chirale entarteten Paritäts-Dubletts existieren, kann die chirale $SU_L(3) \times SU_R(3)$ -Symmetrie der QCD-Lagrangedichte keine Symmetrie des QCD-Grundzustandes sein. Die chirale Symmetrie ist nicht im Wigner-Weyl-Modus realisiert (siehe Anhang A.1).

In Unkenntnis der Hintergründe wird angenommen, daß die chirale Symmetrie der Quark-Gluon-Phase aufgrund spezifischer Quark-Antiquark-Kondensate, deren Entstehungsmechanismus sich auf den Austausch transversaler virtueller Gluonen gründet, in der Baryon-Meson-Phase im nichtlinearen Nambu-Goldstone-Modus realisiert ist [61]. Dies bestätigt zudem die Konsistenzbedingung von 't Hooft [62] (siehe Anhang A.1).

Da im Nambu-Goldstone-Modus $Q_3^a|0\rangle \neq 0$ gilt, ist das physikalische Vakuum kein chirales Singulett, wie es sich aufgrund der Wick-geordneten Produkte der symmetrischen Erzeuger in allen Ordnungen der Störungstheorie ergibt, sondern unterscheidet sich von dem der störungstheoretischen Theorie im chiralen Limes. Es besitzt, ohne die Lorentz- und Farbsymmetrie der Theorie zu beeinflussen, einen Satz von Quark-Antiquark-Kondensaten $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$. Aufgrund dieser quantisierten Anregungen um den Grundzustand, die für jeden Quarkflavour gelten, wird die chirale Symmetrie dynamisch zu ihrer diagonalen vektoriellen Untergruppe, der Flavour-Symmetrie,

$$SU_L(3) \times SU_R(3) \rightarrow SU_V(3) \quad (1.43)$$

gebrochen. Zu den acht Erzeugern der gebrochenen Symmetrie gehört nach dem Goldstone-Theorem ein Oktett masseloser Goldstone-Bosonen, das über die partiell erhaltene Axialvektorstrom-Approximation (PCAC) mit dem Oktett der pseudoskalaren Mesonen (π , K , η) identifiziert werden kann. Aus $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ folgt $m_\pi, m_K, m_\eta \rightarrow 0$.

Dies wird im folgenden über die PCAC-Relationen gezeigt, welche die pseudoskalaren Mesonfelder mit der Ableitung der Axialvektorströme verknüpfen. Der Operator $J_{5\mu}^a$ kann Zustände derselben Quantenzahl wie die des Oktetts der pseudoskalaren Mesonen annihilieren und verbindet die Zustände der pseudoskalaren Mesonen mit dem Vakuum. Berücksichtigt man die Lorentz-Invarianz und die Flavour-Erhaltung, so ergibt sich

$$\langle 0 | J_{5\mu}^a(x) | \phi^b \rangle = i \delta_{ab} f_\phi p_\mu e^{-ip \cdot x}. \quad (1.44)$$

$|\phi^a\rangle$ sind die Zustände der pseudoskalaren Mesonen, p_μ der Meson-Viererimpuls und f_ϕ die Kopplungsstärke des Nambu-Goldstone-Feldes an den Strom (verallgemeinerte Pion-Zerfallskonstante). Für die Divergenz des obigen Ausdrucks gilt weiter

$$\langle 0 | \partial^\mu J_{5\mu}^a | \phi^b \rangle = \delta_{ab} f_\phi m_\phi^2, \quad (1.45)$$

mit $p_\mu^2 = m_\phi^2$. Nimmt man die Identifikation

$$\partial^\mu J_{5\mu}^a = f_\phi m_\phi^2 \Phi^a, \quad \langle 0 | \Phi^a | \phi^b \rangle = \delta^{ab} \quad (1.46)$$

vor, mit Φ^a als pseudoskalaren Mesonfeldoperator, so beinhaltet (1.45) für den Fall $m_\phi^2 = 0$ das Goldstone-Theorem und $\partial^\mu J_{5\mu}^a = 0$.

Bezogen auf die Strommatrixelemente aus (1.30) und (1.31) folgt nach der Goldberger-Treiman-Relation eine Stromerhaltung und Renormierungsskalenunabhängigkeit für die Ströme $J_{5\mu}^3$ und $J_{5\mu}^8$. Nach (1.46) gilt

$$\langle p, s | \partial^\mu J_{5\mu}^3 | p, s \rangle = f_\pi m_\pi^2 \langle p, s | \Phi^3 | p, s \rangle \stackrel{m_\pi \rightarrow 0}{=} 0 \quad , \quad (1.47)$$

$$\langle p, s | \partial^\mu J_{5\mu}^8 | p, s \rangle = f_{\eta_8} m_{\eta_8}^2 \langle p, s | \Phi^8 | p, s \rangle \stackrel{m_{\eta_8} \rightarrow 0}{=} 0 \quad . \quad (1.48)$$

Demnach sind die nichtrenormierten gleich den renormierten Axialvektorströmen

$$J_{5\mu}^3 = (J_{5\mu}^3)_{ren} \quad , \quad J_{5\mu}^8 = (J_{5\mu}^8)_{ren} \quad , \quad (1.49)$$

und die zu den nichtsingulettten Axialladungen assoziierten anomalen Dimensionen verschwinden

$$\frac{d}{dt} a^{3,8} = 0 \quad , \quad \text{mit} \quad t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \quad . \quad (1.50)$$

Die Stromerhaltung folgt ebenso für den Fall einer exakten $SU_F(2)$ - bzw. $SU_F(3)$ -Symmetrie. Für den hochenergetischen Streuprozeß sind die obigen Ströme aufgrund der leicht gebrochenen $SU_F(3)$ -Symmetrie partiell erhalten. Die Abhängigkeiten von der Renormierungsskala sowie die anomalen Dimensionen, die das Hochenergieverhalten der Greenschen Funktionen bestimmt, verschwinden in guter Näherung.

Die Parameter a^3 und a^8 können über das Verhältnis der Axialvektor- zur Vektorkopplungskonstanten g_A/g_V aus polarisierten Neutron- und Hyperon-Beta-Zerfällen extrahiert werden [63]. Die Verhältnisse weisen nichttriviale Baryonstrukturen auf und ergeben

$$\frac{g_A}{g_V}(N \rightarrow P) = (1.2670 \pm 0.0035)_{exp} \quad , \quad \frac{g_A}{g_V}(\Xi \rightarrow \Lambda) = (0.25 \pm 0.05)_{exp} \quad . \quad (1.51)$$

N symbolisiert an dieser Stelle das Neutron, P das Proton, Ξ und Λ die Ξ - und Λ -Baryonen. Geht man von der $SU_F(3)$ -Symmetrie aus, so können die nichtsingulettten Axialladungen a^3 und a^8 im Sinne der Cabibbo-Beschreibung mit den Parametern F und D gemäß

$$\begin{aligned} \frac{g_A}{g_V}(N \rightarrow P) &= F + D = a^3 = 1.2670 \pm 0.0035 \\ \frac{3g_A}{g_V}(\Xi \rightarrow \Lambda) &= 3F - D = a^8 = 0.759 \pm 0.025 \end{aligned} \quad (1.52)$$

verknüpft werden. Diese Annahme ist berechtigt, da das Muster der existierenden semi-leptonischen Hadrondaten nur eine kleine Verletzung der $SU_F(3)$ -Symmetrie aufweist.

Die $SU_F(3)$ -Symmetriebrechung ist der Massendifferenz zwischen den *strange* und nicht-*strange* Quarks proportional. Das Verhältnis F/D hängt dabei nicht wesentlich von der Art der Symmetriebrechung ab [64, 65]. Ein neuerer Fit [66]

$$\frac{F}{D} = 0.573 \pm 0.005 \quad (1.53)$$

liegt nahe dem Wert, der für die Analyse der tiefinelastischen Streuung an polarisierten Nukleonen verwendet wurde [67]. Durch die leichte $SU(3)$ -Flavour-Brechung ist der *strange* See unpolarisiert [68].

1.2.2 Die Nichterhaltung des axialen Singulettstromes

Ein anderes Bild ergibt sich für das Matrixelement aus (1.29). Die auf klassischem Niveau gegebene Flavour-blinde chirale $U_A(1)$ -Phasentransformation mit der Vorschrift

$$q_L \rightarrow e^{i\alpha'} q_L \quad , \quad q_R \rightarrow e^{-i\alpha'} q_R \quad (1.54)$$

und dem zugehörigen axialen Singulettstrom $J_{5\mu}^0$ kann auf Quantenniveau nicht in den obigen Nambu-Goldstone-Modus mit eingeschlossen werden. Das Erhaltungsgesetz der Flavour-blinden chiralen Symmetrie führt nach Quantisierung der klassischen Quarkfelder zu einem anomalen Zusatzterm in der entsprechenden „anomalen Ward-Identität“ für die Greenschen Funktionen. Im Gegensatz zu den Ward-Slavnov-Taylor-Identitäten für die inneren Symmetrien, die aus der exakten Becchi-Rouet-Stora-Invarianz folgen, beruhen die anomalen Ward-Identitäten der externen Symmetrien auf den Veltman- bzw. Bell-Treiman-Transformationen, die eine Unterklasse der Dysen-Schwinger-Gleichungen bilden [69]. Für die Divergenz des axialen Singulettstromes ergibt sich

$$\partial^\mu J_{5\mu}^0 = 2i m_q \bar{q} \gamma_5 q - \frac{N_f g^2}{16\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \cdot f\left(\frac{m_q^2}{k^2}\right) \quad , \quad (1.55)$$

wobei

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{a\alpha\beta} \quad (1.56)$$

der duale Tensor zu $G_{\mu\nu}$, N_f die Anzahl der Flavours, $k^2 \neq 0$ die Gluonvirtualität und

$$f\left(\frac{m_q^2}{k^2}\right) = 1 - \frac{2m_q^2}{k^2 \sqrt{1 + \frac{4m_q^2}{k^2}}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m_q^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m_q^2}{k^2}} - 1} \right) \quad (1.57)$$

eine nicht uniforme Funktion ist. Die wichtigen Grenzwerte für f sind

$$\frac{m_q^2}{k^2} \rightarrow 0 \quad , \quad f \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad m_u, m_d, m_s \ll k^2 \quad (1.58)$$

$$\frac{m_q^2}{k^2} \rightarrow \infty \quad , \quad f \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad m_c, m_b, m_t \gg k^2. \quad (1.59)$$

Damit folgt für den Limes nach (1.58)

$$\partial^\mu J_{5\mu}^0 = 2i m_q \bar{q} \gamma_5 q - \frac{3g^2}{16\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} \quad . \quad (1.60)$$

Die obige Gleichung kann einerseits störungstheoretisch nach Regularisierung der Divergenzen in den sogenannten Adler–Bell–Jackiw–Dreiecksdiagrammen [70]–[76] hergeleitet werden. Höhere Ordnungskorrekturen auf Zwei–Schleifen–Niveau beeinflussen die Anomalie nicht [70]. Andererseits ist die Gleichung (1.60) über den störungstheoretischen Bereich hinaus gültig und kann nichtstörungstheoretisch über die Nichterhaltung des Pfadintegralmaßes bei chiraler Transformation der Fermionfelder in der QCD nach Fujikawa oder über das Indextheorem nach Atiyah und Singer gewonnen werden [77]–[85].

Die Nichterhaltung des $J_{5\mu}^0$ –Stromes im chiralen Limes widerspricht nicht dem Noether–Theorem. Es ist möglich, einen neuen Axialvektorstrom $\hat{J}_{5\mu}^0$ zu definieren, der im chiralen Limes erhalten ist

$$\partial^\mu \hat{J}_{5\mu}^0 \equiv \partial^\mu J_{5\mu}^0 + \frac{3g^2}{16\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} = 0 \quad . \quad (1.61)$$

Dieser ist allerdings nicht eichinvariant und kann nicht an physikalische Felder koppeln. Ein neuntes Goldstone–Boson kann nicht entstehen

$$\langle p, s | \partial^\mu J_{5\mu}^0 | p, s \rangle = f_{\eta_0} m_{\eta_0}^2 \langle p, s | \Phi^0 | p, s \rangle \stackrel{m_{\eta_0} \neq 0}{\neq} 0 \quad . \quad (1.62)$$

Die axiale Anomalie spiegelt formal den Konflikt zwischen Eichinvarianz und chiraler Invarianz aufgrund des singulären Verhaltens der Operatoren $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ und $J_{5\mu} = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ wider. Das Fermionfeld ψ ist an seine kanonisch Konjugierte ψ^\dagger am selben Raumzeit–Punkt gekoppelt und die Stromausdrücke werden zu unbestimmten Größen. Um die Theorie eindeutig zu definieren, müssen die singulären Operatoren zusätzlichen Bedingungen gehorchen. Es gibt keine Bedingung, die sowohl $\partial^\mu J_\mu = 0$ und $\partial^\mu J_{5\mu} = 0$ gleichzeitig erfüllt. Die Eichinvarianz muß erhalten bleiben. Sie ist die Zwangsbedingung dafür, daß sich die internen Anomalien wegekürzen und die Renormierbarkeit und konsistente Quantisierbarkeit der QCD gewährleistet ist. Nach Regularisierung der singulären Operatoren unter der Eichinvarianzbedingung verhalten sich die positiven und negativen Energieeigenwerte der chiralen Zustände aufgrund der anwesenden Eichfelder asymmetrisch und die Chiralität ist keine Symmetrie des Vakuums mehr. Die chiralen Zustände koppeln auch im masselosen Limes miteinander, d.h. die masselose Theorie muß als Limes einer massiven Theorie definiert werden.

In der QCD wird demnach im axialen Singulettkanal der Term $G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}$ aus (1.60) erzeugt. Im Gegensatz zur abelschen Theorie stehen hinter dem Oberflächenterm Gluoneichfeldkonfigurationen. Diese führen zu einer nicht eichinvarianten Ladung

$$\hat{Q}_5 = \int d^3x \hat{J}_{50}^0 \quad , \quad \hat{J}_{50}^0 \equiv J_{50}^0 + 3 \frac{g^2}{8\pi^2} K_0 \quad . \quad (1.63)$$

Die $U_A(1)$ -Transformation ist in einer nichtabelschen Theorie keine Symmetrieoperation in der Minkowski-Raumzeit. K_μ ist der nichtechinvariante axiale Gluonstrom (siehe Kapitel 2).

Die axiale Anomalie induziert eine spezifische Wechselwirkung zwischen $J_{5\mu}^0$ und den Gluonen. $J_{5\mu}^0$ enthält damit nicht nur Quarkfeldoperatoren. Dies ist von wesentlicher Bedeutung für die Polarisations-eigenschaften der starken Wechselwirkung im allgemeinen und im speziellen für die Spinverteilung im Proton. Quarkdynamik und Gluontopologie sind eng miteinander verknüpft.

Aufgrund der induzierten axialen Anomalie folgt für den renormierten Operator

$$(J_{5\mu}^0)_{ren} = Z J_{5\mu}^0 \quad , \quad (1.64)$$

mit Z als divergente multiplikative Renormierungskonstante. Bezeichnet man die assoziierte anomale Dimension mit γ , so gilt

$$\frac{d}{dt} a^0(Q^2) = \gamma a^0(Q^2) \quad , \quad t = \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \quad . \quad (1.65)$$

$J_{5\mu}^0$ ist aufgrund der Anomalie skalenabhängig und kein fester Wert im Sinne eines physikalischen Quarkspindichteoperators ($Q^2 \rightarrow \infty$, $g(Q^2) \not\rightarrow 0$). Die Q^2 -Entwicklung von $a^0(Q^2)$ kann im störungstheoretischen Bereich durch die spinabhängigen Altarelli-Parisi-Gleichungen genähert werden [86].

1.3 Das Interpretationsproblem der Singulettladung

Hinter der Problematik, das erste Moment von g_1 aus der polarisierten tief inelastischen Streuung experimentell wie theoretisch zu bestimmen, steht somit die Bestimmung der axialen Singulettladung $a^0(Q^2)$ über den störungstheoretischen Rahmen hinaus. Da die Gleichung (1.32)

$$\Gamma_1^p = \frac{1}{9} C_s a^0(Q^2) + \frac{1}{12} C_{NS} \left(a^3 + \frac{1}{3} a^8 \right)$$

gilt, muß nach den experimentellen Daten von Γ_1 , a^3 und a^8 die axiale Singulettladung a^0 relativ zu a^8 unterdrückt sein. Geht man von einer glatten Extrapolation der Daten von g_1 für $x \rightarrow 0$ aus [87], so ergibt sich

$$a_0 = 0.28 \pm 0.07 \quad . \quad (1.66)$$

Der Spinanteil der Quarks im Proton stimmt nicht mit der axialen baryonischen Ladung a^0 überein und kann nicht im Sinne des Partonmodells ($a^0 = \Delta\Sigma = 1$) oder des

relativistischen Quarkmodells ($a^0 = \Delta\Sigma = 0.58$) interpretiert werden. Mit dem Protonspinverteilungsproblem stellt sich deshalb die Frage nach dem Ursprung der Verletzung der Okubo–Zweig–Izuka–Regel (OZI–Regel) [88]–[90], d.h. $a^0(Q^2) < a^8$, die dazu führt, daß Gluonen zur Spinverteilung beitragen können.

Aktuelle auf partonischer Sprache basierende Argumente sind von Narison, Shore und Veneziano dargelegt worden. Sie diskutieren das Protonspinproblem und den Ursprung der OZI–Verletzung in Form der anomal unterdrückten Flavoursingulett–Komponente im ersten Moment der polarisierten Strukturfunktion im chiralinvarianten Schema als topologischen Ladungsscreening–Effekt des QCD–Vakuums [28]–[30]. Annahme ist, daß das Ladungsscreening nur schwach von den Quarks abhängt. Sie zeigen dies über die sogenannte „*Composite–Propagator–Vertex–Methode*“, kurz CPV–Methode. Dabei wird das Matrixelement aus (1.27) in ein Produkt aus physikalisch geeigneten zusammengesetzten Operatorpropagatoren und ihren assoziierten ersten Pfadintegral–Vertex–Funktionalen zerlegt. Nach der Zerlegung spaltet sich das Moment der Strukturfunktion g_1 in drei Anteile auf, in die Wilson–Koeffizienten $C_n^i(Q^2)$, in die vom Target unabhängigen nichtstörungstheoretischen QCD–Korrelatorfunktionen $\langle 0 | T \mathcal{O}_i^n \tilde{\mathcal{O}}_j | 0 \rangle$ und in die vom Target abhängigen nichtstörungstheoretischen Vertexfunktionen $\Gamma_{\tilde{\mathcal{O}}_j PP}$. \mathcal{O}_i^n ist der Operatorsatz mit tiefstem Twist, $\tilde{\mathcal{O}}_j$ der physikalisch geeignete Satz zusammengesetzter Operatoren. Der Index $\tilde{\mathcal{O}}_j PP$ steht für die Kopplung des Targetprotons an die berücksichtigten zusammengesetzten Operatoren. Auf dieser Grundlage erhält man den Ansatz

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^{n-1} g_1(x, Q^2) &= \sum_i \sum_j C_n^i(Q^2) \langle 0 | T \mathcal{O}_i^n(0) \tilde{\mathcal{O}}_j | 0 \rangle \Gamma_{\tilde{\mathcal{O}}_j PP} \\ &= \sum_i \sum_j C_i P_{ij} V_j \quad , \end{aligned} \quad (1.67)$$

und es können verallgemeinerte Goldberger–Treiman–Relationen konstruiert werden. Diese sind Erweiterungen der bekannten PCAC–Formen, die als Approximationen in den neuen Gleichungen enthalten sind. Hauptannahme dabei ist, daß die vom Target unabhängige über spektrale Summenregeln berechenbare QCD–Korrelatorfunktion zur OZI–Verletzung führt. Die Ellis–Jaffe–Summenregel ist dann der OZI–Approximation des Vorwärts–Protonmatrixelements des Flavour–Singulettstromes äquivalent.

Alternativ zur CPV–Methode stehen die im eichinvarianten Schema formulierten Arbeiten von Halperin und Zhitnitsky. Unter Verwendung des exakt gültigen Kühn–Zakharov–Theorems bei niedrigen Energien wird eine nichtstörungstheoretische innere *charm*–Komponente des Protons zur Deutung des Protonspinproblems herangezogen [27, 31]. Die Vorzeichenproblematik des Theorems relativ zu den Daten wird mit Hilfe der speziellen Rolle der inneren *charm*–Komponente behoben. Der Flavoursingulettanteil aus (1.29) wird unter Berücksichtigung der *charm*–Komponente des elektromagnetischen Stromes

des virtuellen Photons im Sinne der Standardbehandlung diskutiert. Das erste Moment Γ_1 hat hier die Gestalt

$$\Gamma_1(Q^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \Delta u(Q^2) + \frac{1}{9} \Delta d(Q^2) + \frac{1}{9} \Delta s(Q^2) + \frac{4}{9} \Delta c(Q^2) \right) \left(1 - \frac{g(Q^2)}{\pi} + \dots \right). \quad (1.68)$$

Δq steht wie üblich für die Spinkomponente des Protons zum Quarkflavour $q (= u, d, s, c)$

$$s_\mu \Delta q(Q^2) = \langle p | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q | p \rangle \quad . \quad (1.69)$$

Die unbekannte $SU_F(3)$ -Singulettkombination genügt dann dem Zwang

$$a^0 = \Delta \Sigma + 2 \Delta c \quad , \quad (1.70)$$

mit der partonischen Schreibweise

$$\Delta \Sigma(Q^2) = \Delta u(Q^2) + \Delta d(Q^2) + \Delta s(Q^2) \quad . \quad (1.71)$$

Geht man von den Ableitungen $\partial_\mu (\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q)$ aus und arbeitet im chiralen Limes, so folgt für die drei leichten Flavours

$$a^0 = \frac{1}{2M_p \bar{p} i \gamma_5 p} \langle p | \frac{3g}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a - \frac{g^3}{8\pi^2 m_c^2} f^{abc} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\nu\alpha}^b G_{\alpha\mu}^c | p \rangle \quad . \quad (1.72)$$

M_p und m_c sind die Massen des Protons und des *charm*-Quark. Der erste Term der obigen Gleichung kann über das Kühn-Zakharov-Theorem

$$\langle p | \frac{g}{8\pi} G_{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} | p \rangle = -\frac{2}{3b} M_p \bar{p} i \gamma_5 p \quad , \quad (1.73)$$

mit negativem Vorzeichen bestimmt werden, wobei $b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f$ die Gell-Mann-Low- β -Funktion ist. Das Minuszeichen entsteht, da ein Fermionfeld einen negativen Beitrag zur Nukleonmasse hinsichtlich des Gluonhauptterms liefert. Der zweite, über die *charm*-Komponente induzierte Term aus (1.72) führt den Experimentaldaten gemäß zu einem Endergebnis mit positivem Vorzeichen für a^0 . Er kann unabhängig von der topologischen Dichte im ersten Term aus (1.72) mit Hilfe der Ergebnisse der $(B \rightarrow \eta')$ -Zerfälle experimentell wie theoretisch abgeschätzt werden. Beschreibt man die Zerfälle über den Cabibbo begünstigten $(b \rightarrow c\bar{s})$ -Prozeß, dem ein Übergang von $c\bar{c}$ nach η' folgt, so ist die innere *charm*-Komponente $\langle p | \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 c | p \rangle$ des Protonspins mit der inneren *charm*-Komponente $\langle 0 | \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 c | \eta' \rangle$ des η' -Mesons verbunden. Das η' -Matrixelement verschwindet aufgrund der $(c\bar{c} \rightarrow \text{Gluonen})$ -Übergänge nicht und kann quantitativ als

$$\langle 0 | \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 c | \eta'(Q) \rangle \equiv i f_{\eta'}^c q_\mu \quad (1.74)$$

angegeben werden. $f_{\eta'}^c$ ist das *charm*-Strom-Residuum, das numerisch im wesentlichen über eine nichtstörungstheoretische Analyse der reinen Yang-Mills-Theorie zu

$$f_{\eta'}^c \simeq \frac{3}{4 b \pi^2 m_c^2} \frac{\langle 0 | g^3 f^{abc} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\nu\alpha}^b G_{\alpha\mu}^c | \eta' \rangle_{YM}}{\langle 0 | \frac{g}{4\pi} G_{\mu} \tilde{G}_{\mu\nu} | \eta' \rangle} \simeq (50 - 180) \text{ MeV} \quad (1.75)$$

berechnet werden kann, da η' stark an Gluonen koppelt. Das η' -Meson wird zum Boten zwischen der Welt der leichten Hadronen und jener der Gluonen. Die Größe der *charm*-Komponente wird über die η' -Erzeugung in B -Zerfällen extrahiert [91].

Beide Ansätze, die den nichtstörungstheoretischen wie störungstheoretischen Aspekt der axialen Anomalie integrieren, beruhen im wesentlichen auf einer Interpretation der polarisierten Strukturfunktion g_1 in partonischer Sprache unter Verwendung des Faktorisations-theorems, wobei die partonischen Subprozesse durch die Ein-Photonabsorption dominiert werden.

Im Narison-Shore-Veneziano-Ansatz taucht die Schwierigkeit auf, daß die Protonspinverteilung über zwei unbekannte Größen ausgedrückt werden muß, die nicht direkt meßbar sind. Im Halperin-Zhitnitsky-Ansatz ist die Bestimmung des Residuums $f_{\eta'}^c$ aufgrund der nicht ausreichenden Kenntnisse der kubischen Kondensate der reinen Gluodynamik mit einer großen Unsicherheit behaftet. Zudem ist der Mechanismus der Polarisation und jener der inneren *charm*-Erzeugung nicht erklärt.

Unter Verwendung der Lichtkegelquantisierung mit Regulator in Form diskreter longitudinaler Impulse (DLCQ) wird in dieser Arbeit daher ein anderer Zugang gewählt. Der Instanton-sensitive Mechanismus, der sich hinter dem Oberflächenterm $G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}$ aus (1.60) verbirgt und die Polarisationseigenschaft der starken Wechselwirkung bestimmt, wird mit Hilfe einer spezifischen Eich- bzw. Zwangsimpulsnullmode in einem $(2+1)$ -dimensionalen „*colour flux tube model*“ der DLCQ formuliert. Die Auswirkung dieser Nullmoden wird über die Berechnung des zugehörigen Gluonspektrums sichtbar gemacht.

Die Entwicklung in Lichtkegelvariablen und die Quantisierung auf dem Lichtkegel gründet sich darauf, daß die Strukturfunktion g_1 im Björken-Limes als Fourier-Transformation einer Korrelatorfunktion entlang des Lichtkegels geschrieben werden kann. Zunächst ist es allerdings wichtig, den anomalen gluonischen Beitrag und seine Entstehung im Vakuum in der euklidischen Raumzeit semiklassisch herzuleiten.

Kapitel 2

Das Yang–Mills–Vakuum

2.1 Die großen Eichtransformationen

Das reine Yang–Mills–Vakuum im Feynmanschen Pfadintegralformalismus wird mit Hilfe des erzeugenden Funktional

$$Z[G_\mu^a] = e^{iW[G_\mu^a]} \equiv \langle \Omega' | \Omega \rangle \quad (2.1)$$

beschrieben [92]. $W[G_\mu^a]$ ist die zusammenhängende Greensche Funktionen erzeugende Quantenwirkung. $Z[G_\mu^a]$ gibt die Übergangsamplituden $\langle \Omega' | \Omega \rangle$ von einem reinen Gluonvakuumzustand $|\Omega\rangle$ bei einer Zeit $t \rightarrow -\infty$ in einen anderen Zustand $|\Omega'\rangle$ bei einer Zeit $t \rightarrow +\infty$ an. Das erzeugende Funktional ist bekanntlich aufgrund seines oszillatorischen Charakters nur in der euklidischen Raumzeit

$$x_{\mu_E} = (ix_0, \vec{x}) \quad , \quad \partial_{\mu_E} = (-i\partial_0, \partial_i) \quad , \quad G_{\mu_E} = (-iG_0, G_i) \quad (2.2)$$

mit der Metrik $g_{\mu\nu_E} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ wohl definiert. Die Transformation $x_0 \rightarrow -ix_4$ erfolgt über eine analytische Fortsetzung der Minkowski–Wirkung in die imaginäre Zeit, d.h. über eine Wick–Rotation in die euklidische Raumzeit. Man erhält

$$Z_E[G_{\mu_E}^a] = e^{-W_E[G_{\mu_E}^a]} = \int \mathcal{D}[G_{\mu_E}^a] e^{-S_E[G_{\mu_E}^a]} \quad , \quad (2.3)$$

wobei der Faddeev–Popov–Geistanteil für die Eichfixierung ausschließlich eichinäquivalenter Konfigurationen im Integrationsmaß $\mathcal{D}[G_{\mu_E}^a]$ absorbiert wurde [93]. S_E ist die euklidische Wirkung der Form

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x_E \, G_{\mu\nu_E}^a(x_E) G_{\mu\nu_E}^a(x_E) = \frac{1}{2} \int d^4x_E \, \text{Sp}(G_{\mu\nu_E}(x_E) G_{\mu\nu_E}(x_E)) \quad . \quad (2.4)$$

G_{μ_E} und $G_{\mu\nu_E}$ symbolisieren die Gluonfelder und den Gluontensor in der euklidischen Formulierung in Analogie zu (1.35).

Für das Pfadintegral aus Gleichung (2.3) müssen spezielle Randbedingungen festgesetzt werden, damit nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung die Lösungen der klassischen Feldgleichungen

$$D_{\mu_E}^{ab} G_{\mu\nu_E}^a = \partial_{\mu_E} G_{\mu\nu_E}^a + g \sum f^{abc} G_{\mu_E}^b G_{\mu\nu_E}^c = 0 \quad (2.5)$$

mit endlicher Wirkung ermittelt werden können. Die reine euklidische Yang–Mills–Wirkung S_E bleibt endlich, falls die Randbedingung

$$\lim_{x_E \rightarrow \infty} |x_E|^2 G_{\mu\nu_E}(x_E) = 0 \quad , \quad \text{mit} \quad |x_E| = \left(\sum_{\mu_E=1}^4 x_{\mu_E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

als euklidischer Länge, erfüllt ist [94]. Die Felder G_{μ_E} müssen dabei in der räumlichen Unendlichkeit schnell genug abfallen, d.h. schneller als $|x_E|^{-2}$. Der Feldstärketensor $G_{\mu\nu_E}$ ist dann innerhalb des euklidischen Raumzeitvolumens E^4 , das mit einer vierdimensionalen Sphäre S^4 kompaktifiziert werden kann, ungleich Null. Auf der dreidimensionalen Oberfläche $\partial S_\infty^4 = S_\infty^3$ der vierdimensionalen Sphäre S_∞^4 mit unendlichem Radius verschwindet die Feldstärke. Dies ist erfüllt, wenn das Eichpotential $G_\mu(x_E)$ zu einer reinen Eichung wird. Die Gluonfelder sind invariant unter großen Eichtransformationen

$$G_{\mu_E}(x_E) \rightarrow G_{\mu_E}(x_E)' = U^{-1}(x_E) G_{\mu_E} U(x_E) - \frac{i}{g} U^{-1}(x_E) \partial_{\mu_E} U(x_E) \quad . \quad (2.7)$$

Für die reinen Eichkonfigurationen im Unendlichen, mit $x_E \rightarrow \infty$ und $G_{\mu_E} \rightarrow 0$, folgt die Randbedingung

$$G_{\mu_E}(x_E) \rightarrow G_{\mu_E}(x_E)' = -\frac{i}{g} U^{-1}(x_E) \partial_{\mu_E} U(x_E) \quad . \quad (2.8)$$

Der Gluontensor verschwindet gemäß

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu_E}^a &= \frac{i}{g} \left\{ U^{-1}(\partial_{\mu_E} U) U^{-1} \partial_{\nu_E} U - U^{-1}(\partial_{\nu_E} U) U^{-1} \partial_{\mu_E} U \right\} \\ &- \frac{i}{g} [U^{-1} \partial_{\mu_E} U, U^{-1} \partial_{\nu_E} U] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

$U(x_E)$ ist ein Gruppenelement, das kontinuierlich mit der Identität verknüpft werden kann. Die vierdimensionale euklidische Raumzeit koppelt aufgrund der isomorphen Lie–Algebren mit den Farbindices. Es folgt die Definition der $SU_c(3)$ –Farbgruppenoperation in der euklidischen Raumzeit

$$U(x_E) = \exp\left(i\omega^a(x_E) \frac{\lambda^a}{2}\right) \quad . \quad (2.10)$$

Jede Konfiguration entspricht einer speziellen Abbildung $\omega^a(x_E)$ der euklidischen Raumzeit in die achtdimensionale Farbgruppenmannigfaltigkeit der $SU_c(3)$. Diese Abbildungen

sind äquivalente Klassen und bedingen eine unendlichfache Entartung des semiklassischen Vakuums der QCD [95].

Geht man von einer eindeutig definierten Matrix U aus und betrachtet die möglichen Vakuumkonfigurationen ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Weyl-Eichung $G_4 = 0$, d.h. unter der Annahme, daß die unitären Abbildungen nur Funktionen des Raumes sind und die Matrix U sowohl am Ursprung als auch im Unendlichen eindeutig definiert ist, so sind die Abbildungen von einer Vakuumkonfiguration zu einer anderen lokal im Raum und genügen den Randbedingungen

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} U(\vec{x}) = U_\infty = \mathbf{1} \quad . \quad (2.11)$$

U_∞ ist eine globale Eichtransformation. Die Randbedingungen hängen nicht von der Richtung des unendlich großen \vec{x} ab. Damit lassen sich alle Abbildungen $\omega^a(\vec{x})$ auf einer dreidimensionalen Oberfläche S_∞^3 im Unendlichen definieren. Diese ist eine kompakte Mannigfaltigkeit und topologisch äquivalent zur Oberfläche der vierdimensionalen euklidischen Sphäre S^3 , die durch drei Raumwinkel definiert ist. Die Abbildungen $\omega^a(\vec{x})$ können daher als eine Abbildung der S^3 -Sphäre in die isomorphe Lie-Algebra der Untergruppenmannigfaltigkeit $SU_c(2)$ der $SU_c(3)$ betrachtet werden

$$S^3 \xrightarrow{\omega^a(\vec{x})} SU_c(2) \quad . \quad (2.12)$$

Nach dem Theorem von Bott [96], welches zeigt, daß jede kontinuierliche Abbildung von S^3 nach $SU(N)$ kontinuierlich in eine Abbildung nach $SU(2)$ deformiert werden kann, gilt zudem

$$S^3 \xrightarrow{\omega^a(\vec{x})} SU_c(3) \quad . \quad (2.13)$$

Bezeichnet man diese Abbildung mit $\Pi_3[SU_c(3)]$ und geht davon aus, daß die $SU_c(3)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit isomorph zur $S^3 \times S^5$ -Gruppenmannigfaltigkeit ist, mit S^3 bzw. S^5 als Einheitssphäre des drei- bzw. fünfdimensionalen Farbraumes, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi_3[SU_c(3)] &= \Pi_3[S^3 \times S^5] = \Pi_3[S^3] \times \Pi_3[S^5] \\ &= \Pi_3[S^3] = \Pi_3[SU_c(2)] = \mathcal{Z} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

\mathcal{Z} steht für die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Dies führt zu verschiedenen Eichtransformationen, die sich aufgrund der Topologie der $SU_c(2)$ unterscheiden und damit nicht glatt ineinander überführt werden können.

Definiert man eine Transformation U' , die sich im Unendlichen wie U verhält, so ist es nicht immer möglich U' in U zu transformieren, da U' zu einer anderen Homotopieklasse

als U gehören kann [97]. U' wird aufgrund der Phasenabhängigkeit als ein anderer topologischer Raum mit einer von U verschiedenen topologischen Invarianten charakterisiert. Diese ist eindeutig durch eine Windungszahl

$$N_w = -\frac{1}{24\pi^2} \int dS \epsilon_{ijk} \text{Sp} \left[(U^{-1} \partial_i U) (U^{-1} \partial_j U) (U^{-1} \partial_k U) \right] , \quad (2.15)$$

d.h. durch eine topologische Invariante, die sich nicht stetig ändern kann, bestimmt, wobei das Oberflächenintegral dS im unendlich Fernen liegt und ϵ_{ijk} das Levi–Civita–Symbol bezeichnet, mit $i = 1, 2, 3$. Die Windungszahl N_w spiegelt eine spezifische Eigenschaft der Abbildung von S^3 nach $SU_c(3)$ bzw. nach der Untergruppe $SU_c(2)$ wider. Der Integrand in (2.15) ist die Jacobi–Determinante für die Transformation der Parameter von S^3 in die Parameter, welche die $SU_c(3)$ –Eichrotationen beschreiben. Aufgrund der Tatsache, daß $\Pi_3[SU_c(3)] = \mathbb{Z}$ gilt, durchläuft N_w ganzzahlige Werte von $-\infty$ bis ∞ . Die Windungszahl N_w gibt an, wievielmals die Gruppenmannigfaltigkeit S^3 auf die Gruppenmannigfaltigkeit $SU_c(3)$ abgebildet wurde. Damit existiert eine unendliche Anzahl von Eichkonfigurationen mit Windungszahl N_w auf der Eichgruppe. Das semiklassische Vakuum besteht aus unendlich vielen diskreten Sektoren. Jeder Sektor wird durch eine gegebene Homotopieklasse N_w des entsprechenden Eichgruppenelements U charakterisiert.

2.2 Lokalisierte Quasiteilchen und Tunnelprozesse

Die nichttriviale Homotopie der Abbildung führt zu speziellen Konfigurationen des Yang–Mills–Potentials $G_{\mu\nu}^a$, den von 't Hooft als Instantonen bezeichneten Lösungen der Bewegungsgleichungen (2.5). Diese speziellen Lösungen können einerseits als lokalisierte Pseudoteilchen in der vierdimensionalen euklidischen Raumzeit [98, 99], andererseits als Tunnelvorgang in der imaginären Zeit [100] interpretiert werden. Sie existieren nicht für die Gruppenmannigfaltigkeit S^1 der abelschen $U(1)$, da $\Pi_3(S^1) = 0$. Jede Abbildung von S^3 nach $U(1)$ ist kontinuierlich in eine konstante Abbildung, mit $N_w = 0$, deformierbar.

Um zu zeigen, daß das reine Yang–Mills–Vakuum instantonische Lösungen besitzt, wird die Gleichung (2.4) gemäß

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x_E \left[\mp G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} (G_{\mu\nu}^a \pm \tilde{G}_{\mu\nu}^a)^2 \right] \quad (2.16)$$

umgeschrieben und die minimale Wirkung ermittelt. Aufgrund der topologischen Invarianz des ersten Terms in der obigen Gleichung (2.16) und der positiven Definitheit des zweiten Terms, ist die Wirkung minimal, wenn das Eichfeld (anti-)selbstdual ist

$$G_{\mu\nu}^a = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}^a . \quad (2.17)$$

Jede Lösung dieser Gleichung ist eine Lösung der reinen Yang–Mills–Bewegungsgleichungen aus (2.5). Da im euklidischen Fall, d.h. in der imaginären Zeit,

$$\tilde{G}^a_{\mu\nu_E} = G^a_{\mu\nu_E} \quad (2.18)$$

gilt, im Gegensatz zur Minkowski–Vorschrift

$$\tilde{G}^{a\mu\nu} = -G^{a\mu\nu} \quad , \quad (2.19)$$

können neben den Nullfeldkonfigurationen nichttriviale (anti-)selbstduale Konfigurationen, die Instantonlösungen, für den reellen Gluontensor $G_{\mu\nu_E}$ angegeben werden. Diese wurden erstmals von Belavin, Polyakov, Schwarts und Tyupkin für die Windungszahl $N_w = 1$ konstruiert (siehe Anhang A.2.1).

Die Instantonlösungen stellen lokalisierte nichttriviale Vakuumzustände in der vierdimensionalen euklidischen Raumzeit dar, denn der Energie–Impuls–Tensor

$$\Theta_{\mu\nu_E} = \frac{1}{2} \left\{ G_{\mu\lambda_E} G_{\nu\lambda_E} - \tilde{G}_{\mu\lambda_E} \tilde{G}_{\nu\lambda_E} \right\} \quad (2.20)$$

verschwindet nach (2.18). Durch eine Fortsetzung in den Minkowski–Bereich werden das Eichpotential und der Feldstärketensor aus (A.5) und (A.6) sowie jene Potentiale und Tensoren für beliebige Windungszahlen N_w singulär und komplex und führen zu Tunnel-situationen.

Der Tunnelprozeß entsteht allgemein dadurch, daß die mit den Instanton–Lösungen verknüpfte zeitunabhängige topologische Ladung des euklidischen Raumes

$$\mathcal{Q} = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^4x_E \operatorname{Sp} \left(G_{\mu\nu_E} \tilde{G}_{\mu\nu_E} \right) \quad , \quad (2.21)$$

auch Pontryagin–Index genannt, aufgrund der inäquivalenten Homotopiesektoren zu einer Barriere zwischen den verschiedenen Vakuumzuständen führt. Im Falle der Instantonlösung zur Windungszahl $N_w = 1$ läßt sich das Eichpotential so umschreiben, daß die Yang–Mills–Wirkung zur Wirkung eines doppelten Oszillatorpotentials wird (siehe Anhang A.2.2).

Nach Ersetzung des Gluontensors durch die euklidischen Eichfelder gemäß Gleichung (1.35) und unter Berücksichtigung des dualen Tensors aus (2.18) ergibt sich für die als pseudoskalare Dichte bezeichnete eichinvariante Größe

$$G^a_{\mu\nu_E} \tilde{G}^a_{\mu\nu_E} = 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma_E} \partial_{\mu_E} \left(G^a_{\nu_E} \partial_{\rho_E} G^a_{\sigma_E} + \frac{g}{3} f^{abc} G^a_{\nu_E} G^b_{\rho_E} G^c_{\sigma_E} \right) \quad (2.22)$$

oder geschrieben als Spur

$$\operatorname{Sp} \left(G_{\mu\nu_E} \tilde{G}_{\mu\nu_E} \right) = 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma_E} \partial_{\mu_E} \operatorname{Sp} \left(G_{\nu_E} \partial_{\rho_E} G_{\sigma_E} - \frac{2}{3} ig G_{\nu_E} G_{\rho_E} G_{\sigma_E} \right) \quad , \quad (2.23)$$

mit den Ersetzungen

$$\begin{aligned} \text{Sp}(T^a T^b) &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad , \quad G_{\nu_E}^a \partial_{\rho_E} G_{\sigma_E}^a = 2 \text{Sp}(G_{\nu_E} \partial_{\rho_E} G_{\sigma_E}) \quad , \quad (2.24) \\ \text{Sp}(T^a T^b T^c) &= \frac{1}{4} i f^{abc} \quad , \quad \frac{g}{3} f^{abc} G_{\nu_E}^a G_{\rho_E}^b G_{\sigma_E}^c = -\frac{4}{3} i g \text{Sp}(G_{\nu_E} G_{\rho_E} G_{\sigma_E}) \quad . \end{aligned}$$

Die selbstduale Eichfeldkonfiguration kann damit als eine reine Divergenz

$$\int d^4 x_E \text{Sp}(G_{\mu\nu_E} \tilde{G}_{\mu\nu_E}) = \int d^4 x_E \partial_{\mu_E} K_{\mu_E} \quad (2.25)$$

geschrieben werden, wobei

$$K_{\mu_E} \equiv 2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma_E} \text{Sp}(G_{\nu_E} \partial_{\rho_E} G_{\sigma_E} - \frac{2}{3} i g G_{\nu_E} G_{\rho_E} G_{\sigma_E}) \quad (2.26)$$

der Vierervektor in der euklidischen Raumzeit ist. Nach dem Stokesschen Theorem gilt weiter

$$\int d^4 x_E \partial_{\mu_E} K_{\mu_E} = \int_{\partial S_4} dS_{\mu_E} K_{\mu_E} \quad . \quad (2.27)$$

dS_{μ_E} ist das dreidimensionale Flächenelement in ∂S_4 . Für die Oberfläche ∂S_∞^4 im unendlich Fernen, auf der die Feldstärke gleich Null ist, ergibt sich aufgrund der reinen Eichkonfigurationen nach (2.15)

$$\int_{\partial S_\infty^4} dS_{\mu_E} K_{\mu_E} = -\frac{2}{3g^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma_E} \int_{\partial S_\infty^4} dS_{\mu_E} \text{Sp}((U^{-1} \partial_{\nu_E} U)(U^{-1} \partial_{\rho_E} U)(U^{-1} \partial_{\sigma_E} U)) \quad . \quad (2.28)$$

Verwendet man die Definition der topologischen Ladung \mathcal{Q} aus (2.21), so folgt

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{\partial S_\infty^4} dS_{\mu_E} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma_E} \text{Sp}((U^{-1} \partial_{\nu_E} U)(U^{-1} \partial_{\rho_E} U)(U^{-1} \partial_{\sigma_E} U)) \quad . \quad (2.29)$$

Für das Minimum der euklidischen Wirkung erhält man

$$(S_E)_{Min} = \frac{8\pi^2}{g^2} |\mathcal{Q}| \quad . \quad (2.30)$$

Nimmt man an, daß $G_4 = 0$ für $x_E \rightarrow \pm\infty$, so kann (2.27) nach

$$\int d^4 x_E \partial_{\mu_E} K_{\mu_E} = \int dx_4 \frac{d}{dx_4} \int d\vec{x} K_4 \quad (2.31)$$

umgeformt werden, wobei $d\vec{x} = dx_1 dx_2 dx_3$. Dies führt zur Identität

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \int d\vec{x} K_4 = \frac{g^2}{8\pi^2} \int d\vec{x} \epsilon_{ijk} \text{Sp}(G_i \partial_j G_k - \frac{2}{3} i g G_i G_j G_k) = N_{CS} \quad . \quad (2.32)$$

N_{CS} ist die Chern–Simons–Zahl, welche die Felder bei $x_4 \rightarrow \pm\infty$ charakterisiert [101]. Die Chern–Simons–Zahl transformiert daher unter großen Eichtransformationen gemäß

$$N_{CS} \rightarrow N_{CS} + N_w \quad . \quad (2.33)$$

Da die euklidische Wirkung endlich bleiben muß und die Eichfelder im Unendlichen reine Eichkonfigurationen sind, kann die topologische Invariante \mathcal{Q} als Differenz der Windungszahlen geschrieben werden

$$\mathcal{Q} = \int d\vec{x} K_4 \Big|_{-\infty}^{\infty} = N_{CS}(+\infty) - N_{CS}(-\infty) = N_w(+\infty) - N_w(-\infty) \quad , \quad (2.34)$$

welche die Felder bei $x_4 = \pm\infty$ beschreiben. Setzt man $N_w(-\infty) = 0$ aufgrund der verbleibenden Eichfreiheit, so kann die topologische Ladung \mathcal{Q} als Windungszahl der reinen Eichkonfiguration der Eichpotentiale G_i interpretiert werden. Der in der Weyl–Eichung mit der topologischen Ladung assoziierte Chern–Simons–Strom K_4 im euklidischen Raum ist mit einem Chern–Simons–Strom K_0 im Minkowski–Raum identifizierbar; denn nur die Raumkoordinaten gehen in die Ströme ein. Definiert man die Noether–Ladung

$$\mathcal{Q}_T(t) = \frac{g^2}{16\pi^2} \int d^3x K_0(\vec{x}, t) \quad (2.35)$$

zu einer Zeit $x_0 = t$ im Minkowski–Raum, so gilt im Falle, daß die Eichfelder reine Eichungen sind

$$\mathcal{Q}_T(t = +\infty) = N_w(+\infty) \quad . \quad (2.36)$$

$\mathcal{Q}_T(t)$ ist die Homotopieklasse, die durch die lokale Eichtransformation gekennzeichnet ist. Für ein beliebiges Eichfeld ist $\mathcal{Q}_T(t)$ keine ganze Zahl und hat keine topologische Bedeutung.

Die euklidische Lösung $G_{\mu_E}(x_4, \vec{x})$ interpoliert zwischen den Potentialen $G_\mu(t = \pm\infty, \vec{x})$ bei den reellen Zeiten $t = -\infty$ und $t = +\infty$. Die imaginäre Zeit x_4 spielt dabei die Rolle eines Interpolationsparameters

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_T(t = +\infty) - \mathcal{Q}_T(t = -\infty) \quad . \quad (2.37)$$

Im speziellen Fall der reinen Eichfeldkonfigurationen haben die Anfangs– und Endzustände die Energie Null und sind homotopisch inäquivalent für $\mathcal{Q} \neq 0$, so daß eine Barriere beide Zustände trennen muß. Dies entspricht einer Tunnelsituation, die für den allgemeinen Fall eines beliebigen Eichfeldes nicht gegeben ist, da keine Barriere die Anfangs– und Endzustandsfeldkonfiguration trennt.

Aufgrund der möglichen Tunnelübergänge ist die Unitarität der Theorie nur dann gewährleistet, wenn alle Hilbert–Räume zu verschiedenen Windungszahlen N_w als Gesamtheit

in einem erweiterten Hilbert–Raum mit eingeschlossen werden. Der Vakuumzustand ist dann eine lineare Superposition aller Zustände mit Energie Null und unterscheidbarer Windungszahl. Es ergeben sich nicht nur topologisch stabile Objekte in vier Dimensionen, die zu verschiedenen Windungszahlen gehören und verschiedene Vakuumzustände beschreiben, sondern das Vakuum besteht aus einem unendlichen Satz klassischer Vakua, die über Tunnelprozesse miteinander verbunden sind. Keines dieser klassischen Vakua ist der physikalische Vakuumzustand. Stationäre Zustände werden wie die Blochzustände in einem Festkörper über die Superpositionen

$$\sum_{N_w=-\infty}^{\infty} e^{iN_w \theta} |N_w\rangle \equiv |\theta\rangle \quad (2.38)$$

gebildet, mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und $|N_w\rangle$ Vektoren in einem Hilbert–Raum. In dem Raum der Eichtransformationen $U_1(x)$, der die topologische Ladung um eine Einheit ändert, können die Eichtransformationen über einen Operator

$$T_1 |N_w\rangle = |N_w + 1\rangle \quad , \quad |N_w\rangle = T_1^{N_w} |0\rangle \quad (2.39)$$

dargestellt werden. Der topologische Ladungsoperator \mathcal{Q}_T hat dann die Eigenschaft

$$\mathcal{Q}_T |N_w\rangle = N_w |N_w\rangle \quad , \quad [\mathcal{Q}_T, T_1] = T_1 \quad . \quad (2.40)$$

Mit der Bedingung (2.38) ist das θ –Vakuum bis auf eine Phase invariant unter T_1

$$T_1 |\theta\rangle = e^{-i\theta} |\theta\rangle \quad . \quad (2.41)$$

Damit ergibt sich ein Kontinuum der θ –Vakua, und jedes ist ein geeigneter Grundzustand für die $SU(2)$ –Theorie. Alle möglichen θ –Vakua unterscheiden sich voneinander und sind zueinander orthogonal

$$\langle \theta' | \theta \rangle = \sum_{N_w, M_w} e^{i(N_w \theta - M_w \theta')} \langle N_w | M_w \rangle = \sum_{N_w} e^{iN_w (\theta - \theta')} = 2\pi \delta(\theta - \theta') \quad . \quad (2.42)$$

Die isolierten Instantonen heben die Vakuumentartung in der Energie $E_{N_w} = 0$ auf. Dazu wird die Übergangsamplitude

$$\lim_{x_4 \rightarrow \infty} \langle M_w | e^{x_4 H} | N_w \rangle = \int \mathcal{D}G_E^{(M_w - N_w)} e^{-S_E(G_E^{(M_w - N_w)})} \quad (2.43)$$

zwischen den topologisch verschiedenen Vakua untersucht. Die Eichfixierung und die Geisterterme sind im Integrationsmaß absorbiert. Die funktionale Integration wird auf die Vakuumfelder in der $(N_w - M_w)$ –Homotopieklasse im Unendlichen beschränkt. Nur die euklidischen Eichfelder können zwischen den Vakua $|N_w\rangle$ und $|M_w\rangle$ vermitteln. Geht

man zurück zu Gleichung (2.3) und bildet die Übergangsamplitude von einem Vakuum zu einem anderen mit unterschiedlicher Windungszahl, so folgt die Übergangsamplitude mit dem die Parität- und Zeitumkehr-Invarianz verletzenden eichinvarianten Term

$$\begin{aligned} \langle \theta(+\infty) | \theta'(-\infty) \rangle &= \delta(\theta - \theta') \sum_{N_W} e^{-iN_W \theta} \int \mathcal{D} G_E^{(N_W)} e^{-S_E(G_E^{(N_W)})} \\ &= \delta(\theta - \theta') \sum_{N_W} \int \mathcal{D} G_E^{(N_W)} e^{-\int d^4x \left(\mathcal{L}_E + i \frac{g^2}{32\pi^2} \theta G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a \right)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dabei wurden die Gleichungen (2.21) und (2.34) mit der topologisch nichttrivialen Vierer-Divergenz berücksichtigt.

Instantonen sind somit lokalisierte Gebiete sowohl im Raum als auch in der Zeit mit gluonischen Feldern, die zu einer besonderen Art der Vakuumschwingungen führen, allerdings keine entsprechende Teilchenlösung für $t \rightarrow \pm\infty$ besitzen. Sie stehen nicht im Widerspruch zur Energie-Unschärferelation. Da sie die Vakua mischen und die zugehörigen Zustände auffächern, senken sie die Energie des QCD-Grundzustandes. Die Energiedifferenz und die assoziierte Tunnelrate kann über das Gluonspektrum – berechnet im *tube model* mit Hilfe der DLCQ – direkt ermittelt werden (siehe Kapitel 5).

2.3 Instantonen und die Stromquarks des Protons

Die Tunnelprozesse im gluonischen Vakuum beeinflussen die drei fast masselosen Stromquarks im Proton. Bei Wiederherstellung der Parität- und Zeitumkehr-Invarianz werden die Tunnelprozesse unterdrückt und können nur dann stattfinden, wenn sowohl ein *up*- als auch ein *down*-Quark den Tunnelvorgang begleitet [39]. Aufgrund der Dreiecks-Anomalie führt der topologische Zusatzterm aus (1.60) dazu, daß sich die gewöhnliche chirale Ladung

$$\mathcal{Q}_5 = \int d^3x J_{50}^0 \quad (2.45)$$

ändert, wenn sich der topologische Index ändert. Dies folgt über die Gleichung

$$\hat{\mathcal{Q}}_5 = \mathcal{Q}_5 + 2N_f \mathcal{Q}_T \quad , \quad (2.46)$$

die sich für den chiralen Limes aus (1.63) und (2.35) ableiten läßt. $N_f (= 3)$ ist die Flavourzahl. Da die erhaltene axiale Ladung nicht eichinvariant ist, erhält man

$$[\hat{\mathcal{Q}}_5, T_1] = 2N_f [\mathcal{Q}_T, T_1] = 2N_f T_1 \quad , \quad (2.47)$$

mit T_1 aus Gleichung (2.39). Setzt man $\hat{\mathcal{Q}}_5|0\rangle = 0$, so ist $|N_w\rangle$ ein Eigenvektor zu $\hat{\mathcal{Q}}_5$, d.h.

$$\hat{\mathcal{Q}}_5|N_w\rangle = 2N_w N_f|N_w\rangle \quad , \quad (2.48)$$

und es folgt

$$\langle N_w | e^{-x_4 H} | M_w \rangle = \delta_{M_w N_w} \langle N_w | e^{-x_4 H} | N_w \rangle \quad . \quad (2.49)$$

Das Tunneln zwischen den Vakua verschiedener topologischer Ladungen ist damit unterdrückt. Die Änderung der topologischen Ladung hat die Änderung der Chiralität der Quarks zur Folge

$$\Delta \hat{Q}_5 = \Delta Q_5 + 2N_f \Delta Q_T = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Die Tunnelvorgänge im gluonischen Vakuum koppeln die links- und rechtshändigen Zustände des jeweiligen Quarks miteinander und bedingen, daß ein farbiges Quark mit gegebener Chiralität einen Übergang in einen virtuellen Zustand mit entgegengesetzter Chiralität machen kann. Ein Instanton wechselwirkt in dieser Weise effektiv mit $2N_f$ Quarks und polarisiert das Vakuum. Die Bewegung der Quarks wird dabei nur schwach beeinflusst [102].

Alle θ -Vakua sind im masselosen Fall physikalisch äquivalent und der Operator \hat{Q}_5 rotiert θ gemäß

$$e^{i\sigma \hat{Q}_5} |\theta\rangle = \sum_{N_w} e^{iN_w \theta} e^{i\sigma \hat{Q}_5} |N_w\rangle = \sum_{N_w} e^{iN_w \theta} e^{2i\sigma N_w N_f} |N_w\rangle = |\theta + 2\sigma N_f\rangle \quad . \quad (2.51)$$

Da $\langle \theta' | \theta \rangle = 0$ für $\theta' \neq \theta$ gilt, erhält man für die Übergangsamplitude

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \langle \theta' | e^{-x_4 H} | \theta \rangle &= \delta(\theta' - \theta) \lim_{x_4 \rightarrow \infty} \sum_{N_w} \langle N_w | e^{-x_4 H} | N_w \rangle \\ &= \delta(\theta' - \theta) \int \mathcal{D}G_E e^{-S_E} \quad . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Die Stromquarkmassen in der Quantenzahlkonfiguration des Protons gewinnen dadurch, daß sich ihre Chiralität verändert, an Masse. Dies folgt aus dem Dirac-Massenterm und der Chiralitäts-Amplitude [40, 103]. Instantonen sind mit der Massenerzeugung und der chiralen Symmetriebrechung verknüpft. Dies zeigen auch die zahlreichen Überlegungen zum η - η' -Meson-System [104]–[113]. Da die Stromquarks fast masselos sind, entsprechen die rechts- und linkshändigen Zustände in guter Näherung Quarks mit positiver und negativer Helizität, der Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung, und Instanton-Tunnelprozesse haben damit Auswirkung auf die Polarisation im Proton.

Besitzen Fermionen eine nicht verschwindende Masse, so ist \hat{Q}_5 nicht erhalten und der Tunnelvorgang zwischen den verschiedenen θ -Vakua existiert, Instantonen sowie Antiinstantonen sind frei. Bindungspaare von Instantonen und Antiinstantonen werden allerdings sowohl im masselosen wie massiven Fall nicht unterdrückt.

Dadurch, daß Instantonen die Eichsymmetrie des Yang–Mills–Vakuums wieder herstellen, sind sie verantwortlich für einen Phasenübergang von der annähernd masselosen (*non confining*) zur massiven (*confining*) Phase der Yang–Mills–Theorie, in dem auch die Spinumverteilung stattfindet. Nach semiquantitativen Abschätzungen sind Instanton–Effekte aber nicht stark genug, Quarks im Sinne des Confinements zu binden [114]. Nach Callan, Dashen und Gross können Instantonen aus zwei Meronen bestehen, zwei punktähnlichen Konzentrationen mit halbzahliger topologischer Ladung [115]. Meronen–Lösungen haben eine „unendliche Wirkung“ und sind nicht selbst–dual. Sie entsprechen einer noch nicht verstandenen Form von Tunnelprozessen zwischen zwei verschiedenen Vakua in der reellen Zeit. Die Vakua haben die topologischen Ladungen $n = 0$ und $n = \frac{1}{2}$.

Ein Instanton–Zerfall in zwei Meron–Paare signalisiert einen Phasenübergang der Yang–Mills–Theorie in die Confinement–Phase. Ein Plasma von logarithmisch wechselwirkenden Meronen kann Quarks im Sinne des Confinements binden. Ein derartiges Plasma erzeugt eine lineare Kraft zwischen den Quarks. Es ist allerdings nicht erwiesen, daß Instantonen in Meronen aufspalten.

Neuere Erkenntnisse hinsichtlich der Instantonen als zusammengesetzte Objekte wurden von Gattringer gewonnen [38]. Es wurde die Beziehung periodischer Instantonen, sogenannter Caloronen, zu Konstituenten–Monopolen in der $SU(3)$ –Gittereichtheorie untersucht. Die Ergebnisse zeigen, daß die topologischen Anregungen des QCD–Vakuums komplizierter sind als einfache instantonähnliche „Klumpen“ (*lumps*) und konsistent sind mit einer Substruktur, die nach den Kraan–van Baal–Lösungen für die klassischen $SU(N)$ –Yang–Mills–Gleichungen bei kompaktifizierter Zeit (d.h. bei endlicher Temperatur) erwartet wird.

Nach Kraan und van Baal besteht ein Klumpen der $SU(N)$ mit topologischer Ladung 1 aus N Konstituenten–Monopolen, die für sich alleine keine unabhängigen Objekte sind. Die Klumpen können verschiedene Höhen und Breiten haben (mehr dazu siehe [37]).

Gegenstand der weiteren Untersuchungen ist allerdings nicht die Instanton–Substruktur, sondern die über die 't Hooftsche Wechselwirkung durch Instantonen erzeugte Polarisierung. Über die Gaußsche Bewegungsgleichung läßt sich eine Verbindung der euklidischen Instantonphysik mit dem $SU(2)$ *colour flux tube model* im Formalismus der DLCQ gewinnen. Es wird dabei auf dem Zusammenhang zwischen funktionaler Formulierung der nichtabelschen Yang–Mills–Theorie und den lokalen Gleichungen zweidimensionaler integrierbarer Modelle nach Polyakov aufgebaut [116, 117].

2.4 Die Gaußsche Bewegungsgleichung

Entscheidend bei der Instantonphysik ist, daß der topologisch erweiterte Hilbert–Raum ein Konstrukt ist, das über die Weyl–Eichung ins Spiel kommt. Die topologische Struktur ist eichabhängig [97]. Die θ –Struktur entsteht, da die Gaußsche Bewegungsgleichung

$$D_i^{ab} G_{0i}^b = 0 \quad (2.53)$$

nur dann zu einer Eichäquivalenz der Zustände führt, wenn diese über kleine Eichtransformationen mit $N_w = 0$ verbunden sind. Für große Eichtransformationen bedingt die Bewegungsgleichung keine Eichäquivalenz der verschiedenen Homotopiesektoren.

In der DLCQ ist die Vakuumstruktur aufgrund der Infrarot–Regulator–Behandlung des Lichtkegel–Anfangswertproblems mit Vakuum–Freiheitsgraden der Felder, den sogenannten Nullimpulsmoden, verbunden. Aufgrund der Infrarot–Regularisierung sind einige Nullimpulsmoden–Feldoperatoren keine dynamischen Feldgrößen, sondern genügen spezifischen Zwangsbedingungen zweiter Klasse. Die θ –Vakuumstruktur kann daher über die Behandlung dieser Zwangsnullimpulsmoden der Felder reproduziert werden. Die Felder müssen auf einem kompakten Raum definiert werden. Dabei ergibt sich eine Eichabhängigkeit.

Der erweiterte Hilbert–Raum kann in der DLCQ über die Coulomb–Eichung auf den rein physikalischen Hilbert–Raum beschränkt werden. Dazu muß die Eichfreiheit auf klassischem Niveau behoben werden. Dies kann auf eine Weise geschehen, in der man sich auf den „*fundamental modular domain*“ für die Eichfeld–Nullimpulsmoden beschränkt. θ tritt dann als Freiheitsgrad in der Randbedingung auf, die von der Nullimpulsmodenwellenfunktion auf dem *fundamental modular domain* erfüllt wird.

Die Vakuumstruktur der in Kapitel 5 betrachteten reinen Yang–Mills–Theorie in $2+1$ Dimensionen auf dem Lichtkegel ist in der dynamischen Eichnullimpulsmoden des Gluonfeldes und einer Zwangsnullimpulsmoden des Skalarfeldes enthalten. Die Zwangsnullimpulsmoden genügt einer linearen Zwangsgleichung. Zusammen mit der Eichnullimpulsmoden beeinflusst sie die Tunnelprozesse in der DLCQ im *fundamental modular domain* und führt zur Spinumverteilung im Proton. Um dies zu entwickeln, wird zunächst der DLCQ–Formalismus vorgestellt, bevor anschließend auf das Gluonmodell eingegangen wird.

Kapitel 3

Die Lichtkegelquantisierung

3.1 Das Spinproblem aus der Sicht der DLCQ

Die Lichtkegelquantisierung mit Infrarot-Regulator in Form diskreter longitudinaler Impulse, kurz DLCQ (*Discretized Light-Cone Quantization*), verknüpft die ursprüngliche Formulierung der QCD auf dem Lichtkegel [118] mit Fock-Zustandsmethoden. Diese nichtstörungstheoretische Methode zur Lösung relativistischer Quantenfeldtheorien wurde erstmals 1985 von Pauli und Brodsky vorgeschlagen [43, 119, 120]. Sie ermöglicht eine konsistente Behandlung relativistischer Vielteilchensysteme und hebt die Problematik der Unvereinbarkeit des Konstituentenquarkmodells mit dem Partonmodell und der QCD auf. Der auf der Hamiltonschen Formulierung einer Feldtheorie in Lichtkegelkoordinaten basierende Formalismus verwendet eine kanonische Quantisierung in der Impulsraumdarstellung. Komplementär zur Gittereichtheorie werden der Lichtkegelimpuls diskretisiert und die Felder zur gleichen Lichtkegelzeit quantisiert. Verwendet werden periodische Randbedingungen, die zu einer diskreten Basis ebener Wellen im Hilbertraum führen und als Infrarot-Regulator dienen. Das Fockraum-Vakuum ist dann das physikalische Lichtkegelvakuum. Der entsprechende Impulsoperator ist positiv definit. Dies führt zur Definition von Quasiteilchen als elementare Anregungen auf dem Vakuum. Damit wird der Antwort auf die Frage nähergekommen, wie Hadronen nichtrelativistische einfache Quark-Antiquark- oder Drei-Quark-Bindungszustände sein können, wenn sie Anregungen über einem komplizierten Vakuum-Zustand sind. Die Protonspinverteilung und die Polarisations-eigenschaft der starken Wechselwirkung werden genauer strukturierbar.

Es ist möglich, die Wellenfunktionen und Spektren hadronischer Teilchen für alle Kopplungsstärken zu berechnen. Das Hadronspektrum ergibt sich über die Diagonalisierung des Lichtkegel-Hamiltonoperators. Jeder Eigenzustand kann als eine Summe reiner Fockzustände von beliebiger Teilchenzahl dargestellt werden. Die Lichtkegel-Wellenfunktionen

sind dabei die Koeffizienten der Entwicklung. Die Einfachheit des Lichtkegel–Vakuums wird allerdings durch Vakuum–Freiheitsgrade, sogenannte Nullimpulsmodenanregungen, aufgehoben, die mit dem Fockraum–Vakuum koppeln können, die Quasiteilcheninterpretation der Feld–Fockmoden aber nicht zerstören, da sie keine transversale Impulsabhängigkeit besitzen.

Nullimpulsmoden sind komplizierte operatorwertige Funktionen aller Moden in der Theorie. Sie tragen einen Nullimpuls und können daher langreichweitige Physik beschreiben. In der Infrarot–Regularisierung der DLCQ einer gegebenen Feldtheorie sind einige Nullimpulsmoden–Feldoperatoren keine dynamischen Feldgrößen. Diese erhalten die Einfachheit des Vakuums, genügen aber gewissen Zwangsbedingungsgleichungen. Vakuumkopplungen, die über sogenannte Zwangsimpulsnullmoden entstehen, werden im weiteren zur Beschreibung der anomalen gluonischen Beiträge als spezifische Vakuumeffekte der nichtabelschen Gruppentopologie der QCD hinsichtlich der Protonspinverteilung untersucht.

Der 1991 von Brodsky und Pauli für die QCD in $(3+1)$ Dimensionen aufgestellte Lichtkegel–Hamiltonoperator [121] konnte allerdings aufgrund transversaler Freiheitsgrade computertechnisch bisher nicht diagonalisiert werden. Daher wird im Zusammenhang mit der Diskussion der Protonspinverteilung als Vakuumeffekt der Yang–Mills–Anteil der sogenannten kollinearen Version der QCD in $(3+1)$ Dimensionen betrachtet [122]–[124].

Ausgangspunkt ist ein dynamisches Gluonmodell auf dem DLCQ–Impulsgitter mit Spinfreiheitsgraden, das Gluon–Gluon–Paare in ausgedehnten longitudinalen und eingeschränkten transversalen Dimensionen beschreibt. Die Vakuumstruktur dieser Theorie ist in einer dynamischen Eichnullimpulsmoden und einer Zwangsnullimpulsmoden enthalten. Die Zwangsnullimpulsmoden genügt einer linearen Gleichung, die bedingt, daß das Vakuum nichttrivial ist und es zu einer Symmetriebrechung auf dem Lichtkegel kommt. Auf diese Weise können die spezifischen Tunnelvorgänge im gluonischen Vakuum analysiert werden, die sich auf die Chiralität der Quarks und auf die Spinverteilung im Proton auswirken.

Ein Zusammenhang zwischen Vakuumstrukturen und Nullimpulsmoden wurde bereits für die ϕ^4 –Theorie untersucht, die strukturell der Vierpunktwechselwirkung von Gluonen ähnlich ist. Spontane Symmetriebrechung und Vakuumkondensation konnte durch nicht dynamische sogenannte Zwangsnullimpulsmoden erklärt werden [52, 53].

3.2 Die Koordinaten und die Impulse

In relativistischen Theorien läßt sich der Begriff der Zeit im Gegensatz zur nichtrelativistischen Quantenmechanik verallgemeinern. Der verallgemeinerte Hamiltonoperator P_0 propagiert das relativistische System in dem Raumzeitentwicklungsparameter τ gemäß

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi\rangle = P_0 |\psi\rangle \quad . \quad (3.1)$$

Für diesen verallgemeinerten Entwicklungsparameter gibt es nach Dirac allerdings nicht mehr als drei inäquivalente Standardformen, die im nichtrelativistischen Limes gleich sind [51]. Dies sind die *instant form*, die *point form* und die *front form*. Alle anderen Parametrisierungen des Minkowski-Raumes können über eine Lorentz-Transformation auf eine der drei Formen zurückgeführt werden. In der *instant form* ist τ die aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannte Zeit $x^0 = t$. In der *point form* gilt $\tau = \sqrt{(x^0)^2 - (\vec{x})^2}$. Die DLCQ geht von der dritten Standardform, der *front-form*-Definition,

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^3) \quad , \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^3) \quad , \quad \vec{x}_\perp \equiv (x^1, x^2) \quad (3.2)$$

aus. Als verallgemeinerter Zeitentwicklungsparameter wird $\tau = x^+$ definiert. Die Auswahl der x^3 -Richtung ist frei, ebenso die Wahl zwischen x^+ und x^- zum Zeitentwicklungsparameter, da durch die Drehung des Koordinatensystems im Minkowski-Raum mit zwei Koordinaten auf dem Lichtkegel Raum und Zeit neu zu definieren sind. Die kanonische Quantisierung der Theorie wird bei gleicher Lichtkegelzeit in einer Impulsraumformulierung vorgenommen. Als Anfangswertfläche wird die Hyperebene tangential zum Lichtkegel, $x^+ = 0$, gewählt. Der metrische Lichtkegeltensor hat die Gestalt

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mu, \nu = (+, -, 1, 2) \quad . \quad (3.3)$$

Die partiellen Ableitungen sind entweder eine Zeit- oder eine Raumableitung abhängig von der Stellung des Lorentz-Index

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} = \partial^- \quad , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} = \partial^+ \quad . \quad (3.4)$$

Die konjugierten Impulse zu x^+ und x^- sind

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 - p^3) \quad , \quad (p^+, \vec{p}_\perp) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 + p^3), p^1, p^2 \right) \quad . \quad (3.5)$$

p^- wird als Lichtkegelenergie und (p^+, \vec{p}_\perp) als Lichtkegelimpuls eines Teilchens definiert.

3.3 Die Dispersionsrelation

Für ein freies Teilchen mit der Masse m läßt sich aufgrund der Energie–Impuls–Relation $p^\mu p_\mu = 2p^+ p^- - p_\perp^2 = m^2$ die Dispersionsrelation

$$p^- = \frac{m^2 + p_\perp^2}{2p^+} \quad (3.6)$$

aufstellen, denn massive Teilchen besitzen keinen verschwindenden longitudinalen Impuls $p^+ = 0$. Teilchen nehmen ausschließlich positive, die zugehörigen Antiteilchen negative Werte von p_i^- und p_i^+ an. Bezogen auf das Fockraum–Vakuum, den Referenzzustand mit Energie und Longitudinalimpuls Null, erhält man nach Renormierung Teilchen und Antiteilchen mit positiven Energien und Longitudinalimpulsen im Gegensatz zur *instant form*, in der nur die Energie positiv sein muß.

Die positive Definitheit der Einteilchenimpulse bedingt, daß in der Theorie der wechselwirkenden Felder alle angeregten Zustände den positiv definiten longitudinalen Impuls $P^+ = \sum p_i^+$ haben und nicht mit dem Vakuum der freien Theorie koppeln. Der Grundzustand der freien Theorie ist mit dem der wechselwirkenden Theorie identisch. Dies bedeutet, daß alle Konstituenten in einem physikalischen Eigenzustand direkt mit dem Lichtkegel–Vakuum verbunden sind und nicht aus abgetrennten Vakuumfluktuationen bestehen. Damit werden die Strukturfunktionen Wahrscheinlichkeitsgrößen der Lichtkegelwellenfunktionen.

Allerdings können die Nullimpulsmodenanregungen mit dem Lichtkegelvakuum koppeln. Für die Nullimpulsmodenanregungszustände, die Fourier–Moden masseloser Teilchen mit $p_i^+ = 0$, hat die Dispersionsrelation (3.6) keine Gültigkeit.

3.4 Die Lichtkegeloperatoren

Die (Anti–)Kommutatorrelationen werden bei gleicher Lichtkegelzeit aufgestellt, d.h. zwischen zwei Raumzeit–Punkten, die über einen lichtartigen Abstand miteinander verbunden sind. Alle relevanten Operatoren konstruiert man in der Impulsraumdarstellung. Die Quantisierungsvorschrift erfolgt nach dem Dirac–Bergmann–Formalismus [125]. Es wird kanonisch in Anwesenheit spezifischer Zwangsbedingungen quantisiert. Die zehn die Dynamik des Systems beschreibenden Generatoren der Poincaré–Gruppe auf dem Lichtkegel sind explizit: die Lichtkegelenergie P^- , die drei Komponenten des Lichtkegelimpulses P^+, P^1, P^2 , die Lichtkegeldrehimpulsoperatoren M^{1-}, M^{2-} , die longitudinale Rotation um die x^3 –Achse M^{12} , die Lichtkegel–Boost–Operatoren M^{1+}, M^{2+} sowie der longitudinale Boost in x^3 –Richtung M^{+-} [51]. Sie erfüllen die Poincaré–Algebra [126]:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\lambda\mu}, P^\nu] = i(g^{\mu\nu}P^\lambda - g^{\lambda\nu}P^\mu) \quad (3.7)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}) \quad .$$

Die Lichtkegelimpulsoperatoren, der longitudinale Rotationsoperator und die Boost-Operatoren sind kinematische Operatoren, die mit der Lichtkegelenergie kommutieren, und unabhängig von jeder Wechselwirkung die Anfangswertoberfläche invariant lassen.

Diese einfachen Felddarstellungen erlauben eine Quantisierung auf dem Lichtkegel unabhängig von einem speziellen Bezugssystem. Die berechneten Wellenfunktionen hängen nur von den inneren relativen Impulskoordinaten $x_i = \frac{p_i^+}{P^+}$, mit $0 < x_i < 1$, und $k_{\perp i}$, mit $p_{\perp i} = x_i P_{\perp} + k_{\perp i}$, ab. Sie haben in jedem Lorentz-Bezugssystem Gültigkeit, und es gilt die Impulserhaltung $\sum_i x_i = 1$ und $\sum_i k_{\perp i} = 0$ [120].

Die dynamischen Generatoren P^- , M^{1-} und M^{2-} enthalten die Wechselwirkung zwischen den Feldern, erzeugen eine Bewegung in der Lichtkegelzeit x^+ und kommutieren nicht mit P^- . Die Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe sind das Massenquadrat M^2 und das Quadrat des vierdimensionalen axialen Pauli-Lubanski-Vektors w . Es gilt

$$M^2 = P_\mu P^\mu = 2 P^+ P^- - \vec{P}_\perp^2 \quad , \quad (3.8)$$

$$w^2 \equiv M^{\mu\sigma} M_{\nu\sigma} P_\mu P^\nu - \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} M^2 \quad , \quad (3.9)$$

$$w_\rho = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\lambda M^{\mu\nu} \quad . \quad (3.10)$$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor in vier Dimensionen, mit $\epsilon_{1234}/\epsilon_{+-12} = 1$. Über das Massenquadrat M^2 wird eine zum Heisenberg-Problem des Zeitentwicklungsoperators äquivalente Eigenwertgleichung

$$H_{LC} | \Psi \rangle = M^2 | \Psi \rangle \quad (3.11)$$

aufgestellt. $H_{LC} \equiv P^\mu P_\mu$ ist der Lichtkegel-Hamiltonoperator. Dieser beinhaltet alle Informationen über die gesuchten Masseneigenwerte und Wellenfunktionen sowie in bezug auf den axialen Vektor w wesentliche Aussagen über die Spinverteilung eines zusammengesetzten Teilchens. Die Verbindung zwischen dem Spin eines Teilchens in der *instant form* und der Helizität in der *front form* wird über eine Melosh-Rotation hergestellt [127].

Die Vektoren $|\Psi\rangle$ sind aufgrund der Diagonalität der Boost-Operatoren in der Lichtkegel-Fockraum-Darstellung für jedes Bezugssystem gleich. Jeder hadronische Eigenzustand $|\Psi\rangle$ des Lichtkegel-Hamiltonoperators kann in einen vollständigen Satz der Eigenzustände $\{|n\rangle\}$ des freien Hamiltonoperators entwickelt werden [120], der dieselben globalen Quantenzahlen hat

$$|\Psi\rangle = \sum \psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i) |n\rangle \quad . \quad (3.12)$$

Jedes Hadron kann in zweitquantisierte Summen über die Fluktuationen der Farbsingulett-Zustände verschiedener Impulse und Quantenzahlen entwickelt werden, da die Eigenzustände des Lichtkegel-Hamiltonoperators nach (3.11) das Spektrum der Hadronen reproduzieren und sich als Summe der Fockzustände beliebiger Teilchenzahl darstellen lassen. Die Koeffizienten der Fluktuationen sind die Wellenfunktionen $\psi_n(x_i, k_{\perp i}, \lambda_i)$ aus (3.12) auf dem Lichtkegel.

Im Falle des Protons beginnt die Fock-Entwicklung mit dem Farbsingulettzustand $|uud\rangle$ der freien Quarks und setzt sich mit $|uudg\rangle$ sowie anderen Quark-Antiquark- und Gluonen-Zuständen fort, welche die Freiheitsgrade des Protons in der QCD aufspannen. Die Fockzustände $\{|n\rangle\}$ werden auf dem freien Vakuum gebildet, indem man die freien Lichtkegel-Erzeugungsoperatoren auf das freie Vakuum anwendet. Die Summation geht über alle Impulse $(x_i, k_{\perp i})$ und Helizitäten λ_i , die der Impulserhaltung $\sum_i^n x_i = 1$ und $\sum_i^n k_{\perp i} = 0$ sowie der Erhaltung der Projektion J^3 des Drehimpulses genügen.

3.5 Die Kompaktifizierung der Lichtkegeltheorie

In der DLCQ wird komplementär zur Gittereichtheorie der Lichtkegelimpuls diskretisiert und ein unendliches Gitter mit endlichen Gitterabständen im Impulsraum betrachtet. Das Gitter erhält man, indem die freien Felder auf dem endlichen Intervall $[-L, L]$ in der Lichtkegelraumrichtung x^- bzw. dem Intervall $[-L_{\perp}, L_{\perp}]$ in den transversalen Richtungen x_1, x_2 quantisiert werden. Zudem müssen ebene Wellen mit periodischen oder antiperiodischen Randbedingungen gefordert werden. Die Kompaktifizierung [139] der Feldtheorie führt zu abzählbaren Impulszuständen. Die Longitudinalimpulse sind

$$p_n^+ = \frac{n\pi}{L} \quad . \quad (3.13)$$

Für die periodischen Randbedingungen nimmt n die Werte $0, 2, 4, \dots$, für die antiperiodischen die Werte $1, 3, 5, \dots$ an. Periodische Randbedingungen werden gewöhnlich für die Bosonfelder, antiperiodische für die Fermionfelder gewählt.

Durch die Einführung eines Impulsabschneideparameters Λ wird das Gitter endlich und der Impulsraum abzählbar endlich. Die Hamilton-Matrix der Eigenwertgleichung (3.11)

kann damit auf eine endliche Matrix reduziert und numerisch diagonalisiert werden. Wegen der Längen L , L_\perp und des Infrarot-Abschneideparameters Λ ist die Lorentz-Invarianz gebrochen. Diese kann durch den Übergang in den Kontinuums-limes $\Lambda \rightarrow \infty$ und $L, L_\perp \rightarrow \infty$ wiedergewonnen werden. Die diskreten Impulse werden in diesem Limes wieder kontinuierlich.

Kapitel 4

Das Gluonmodell

Im folgenden wird die Gluonpolarisation genauer untersucht, da eine signifikante Polarisation der strange Seaquarks im Experiment nicht bestätigt wurde und theoretisch aufgrund der $SU(3)$ -Flavour-Symmetriebrechung nicht notwendig folgt und höhere Twist-Effekte nur eine kleine Korrektur zu Gleichung (1.66) beisteuern. Der Beitrag eines orbitalen Drehimpulses wird außer acht gelassen.

Für die Untersuchung des Protonspinverteilungsproblems unter dem Aspekt der Nullimpulsmoden-Vakuumstruktur auf dem Lichtkegel wird das sogenannte „*colour flux tube model*“ vorgestellt [122]–[124]. QCD-Effekte wie die Paarerzeugung von Partonen werden über eine *colour flux tube* ähnliche Gluon-Wechselwirkung erklärt. Motiviert wird dieses Bild einerseits durch die strukturell ähnliche Symmetrie-Algebra der Instantonen in zwei Dimensionen und der in den vierdimensionalen selbst-dualen Yang-Mills-Gleichungen [128]. Andererseits existieren experimentelle Hinweise auf Flußröhren in Baryonen und Mesonen aus Streuexperimenten [129].

Der *colour flux tube* wird über eine $(1 + 1)$ -dimensionale reine Gluontheorie mit adjungierter Materie von bosonischer Natur formuliert. Die Eichnullimpulsmode des longitudinalen Gluonfeldes tritt dabei als dynamischer Freiheitsgrad auf. Die Nullimpulsmode des transversalen Gluonfeldes gehorcht einer spezifischen Zwangsgleichung. Eich- und Zwangsnullimpulsmode bilden die Grundlage für eine nichttriviale Vakuumstruktur, die mit der nichtabelschen Gruppentopologie verknüpft ist. Helizitäts- bzw. Spinfreiheitsgrade bleiben trotz dimensionaler Reduktion erhalten.

Der Gedanke, daß die Gluonpolarisation auf eine *colour flux tube* ähnliche Wechselwirkung zurückgeführt werden kann, wurde bereits in [130]–[132] mit Hilfe des Matrixelements eines eichinvarianten nichtlokalen „Gluonstring“-Operator diskutiert. A priori ist allerdings nicht bekannt, wie ein nichtlokaler Operator praktisch zu handhaben ist.

4.1 Die Lagrangedichte

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist hier die reine Yang–Mills–Lagrangedichte in zwei Raum–Dimensionen und einer Zeit–Dimension

$$\mathcal{L}_{(2+1)} = -\frac{1}{2} \text{Sp} (\mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \text{Sp} (\mathbf{F}^{\alpha\beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} + 2\mathbf{F}^{\alpha\perp} \mathbf{F}_{\alpha\perp}) \quad , \quad (4.1)$$

mit

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu + i\mathbf{g} [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu] = \partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \mathbf{D}^\nu \mathbf{A}^\mu \quad . \quad (4.2)$$

$\mathbf{F}^{\mu\nu}$ ist der Gluonfeldstärketensor, bei dem die Lorentz–Indices μ (bzw. ν) in longitudinale α (bzw. β) = +, – und transversale \perp Anteile zerlegt wurden, und \mathbf{g} ist die Kopplungskonstante. Das dreidimensionale Eichfeld $\mathbf{A}^\mu = \mathbf{A}^+, \mathbf{A}^-, \mathbf{A}^\perp$ setzt sich aus den $SU_c(2)$ –Vektorpotentialen der drei Gluonen zusammen, \mathbf{D}^ν bezeichnet die kovariante Ableitung

$$\mathbf{D}^\nu \equiv \partial^\nu + i\mathbf{g} [\mathbf{A}^\nu, *] \quad . \quad (4.3)$$

Nimmt man an, daß die transversale Raumkoordinate $x_\perp = x^1$ kompakt und klein ist, wie dies beispielsweise für hohe Temperaturen in der euklidischen Version der Fall ist, so können die transversalen Impulsanregungen für $\mathbf{A}^+, \mathbf{A}^-$ und \mathbf{A}^\perp gemäß

$$\partial_\perp \mathbf{A}^\mu = 0 \quad (4.4)$$

eingeschränkt werden. Man läßt nur die Nullimpulsmoden transversaler Gluonanregungen zu. Die transversalen Normalimpulsmoden sind dann hochenergetische Moden, wobei der Impuls der niedrigsten Normalimpulsmoden $\sim 1/L_\perp$ ist. Diese können herausintegriert werden, so daß man einen effektiven Hamiltonoperator für die verbleibenden transversalen Nullimpulsmoden erhält. Hinsichtlich der longitudinalen Gluonanregungen werden die Null– und die Normalimpulsmoden berücksichtigt.

Mit dieser Einschränkung kann die Theorie in einem kleinen transversalen Volumen, in einem sogenannten *colour flux tube*, formuliert werden. Die als Lichtkegel–Analogon zum *equal time* Femto–Universum [133]–[135] definierte Theorie ist für die Untersuchung der Gluoneffekte der nichtabelschen $SU_c(2)$ –Gruppentopologie und für die Polarisierung der Materie wesentlich. Es ergibt sich eine auf 1 + 1 Dimensionen reduzierte $SU_c(2)$ –Eichtheorie, in der die ursprüngliche (2+1)–dimensionale Struktur in der transversalen Gluonkomponente \mathbf{A}^\perp erhalten bleibt. \mathbf{A}^\perp kann als spurloses 2×2 hermitesches Skalarfeld Φ definiert werden [136, 137], das sich unter der adjungierten Darstellung der $SU_c(2)$ –Farbgruppe transformiert.

Da die transversale Länge nur als Vorfaktor der Fourier–Entwicklung der Felder auftritt,

können die Einheiten für \mathbf{A}^μ , \mathbf{g} und $\mathbf{F}^{\alpha\beta}$ nach

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mu &\rightarrow A^\mu = \mathbf{A}^\mu (2L_\perp)^{\frac{1}{2}} \quad , \\ \mathbf{g} &\rightarrow g = \mathbf{g} (2L_\perp)^{-\frac{1}{2}} \quad , \\ \mathbf{F}^{\alpha\beta} &\rightarrow F^{\alpha\beta} = \mathbf{F}^{\alpha\beta} (2L_\perp)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4.5}$$

umskaliert werden. Gemäß der Einschränkung aus (4.4) ergibt sich die neue Lagrange-dichte

$$\mathcal{L} = \text{Sp} \left(-\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + D^\alpha \Phi D_\alpha \Phi - \mu_0^2 \Phi \Phi \right) \quad , \tag{4.6}$$

wobei

$$A^\mu = (A^+, A^-, A^\perp) = (V, A, \Phi) \quad , \quad D^\alpha \Phi = \partial^\alpha \Phi + ig[A^\alpha, \Phi] = F^{\alpha\perp} \tag{4.7}$$

berücksichtigt wurde. Der Massenterm μ_0 des Skalarfeldes Φ dient der Absorption der logarithmisch divergenten Massenrenormierung und zerstört nicht die (1+1)–dimensionale Eichinvarianz der Theorie. Die Lagrangedichte hat die Struktur einer nichtabelschen Eichtheorie in 1 + 1 Dimensionen, die an Materie von bosonischer Natur in der adjungierten Darstellung der $SU_c(2)$ –Farbgruppe koppelt. Die adjungierte Materie imitiert transversale Gluoneffekte im Gegensatz zum $SU_c(N)$ ’t Hooft–Modell in 1 + 1 Dimensionen. Das Modell von ’t Hooft koppelt an Materie in der fundamentalen Darstellung, und es treten ausschließlich Quark–Antiquark–Bindungszustände auf, da es keine transversalen Gluonen gibt [138]. Als Eichung wird die Lichtkegel–Coulomb–Eichung

$$\partial_- V(x^-, x^+) = 0 \tag{4.8}$$

verwendet. Die Randbedingungen werden periodisch gewählt und der topologisch erweiterter Hilbert–Raum eingeschränkt. Die physikalischen Freiheitsgrade sind dabei nicht beschränkt, wie dies bei der Lichtkegel–Eichung $V = 0$ der Fall ist. In der Lichtkegel–Eichung wird die eichinvariante Nullimpulsmode des Eichfeldes V als physikalischer Freiheitsgrad eliminiert [139].

4.2 Die Nullimpulsmoden

Um die Nullimpulsmoden im Farbraum behandeln zu können, wird für die Felder die Helizitätsbasis

$$A^\mu(x^+, x^-) = \tau^3 A_3^\mu(x^+, x^-) + \tau^+ A_+^\mu(x^+, x^-) + \tau^- A_-^\mu(x^+, x^-) \quad (4.9)$$

eingeführt [140]. Hierbei muß für die Indices $+$ und $-$ der Felder die untere Schreibweise beachtet werden im Gegensatz zur oberen Indexschreibweise für die longitudinalen Felder. Der untere Index der Felder steht immer für die Helizitätsbasis. Für die adjungierte Darstellung wählt man die spurlosen hermiteschen 2×2 Farbmatriizen τ^a als Erzeugende der $SU_c(2)$ -Gruppe

$$\tau^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma^1 + i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.10)$$

$$\tau^- = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sigma^1 - i\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

und

$$\tau^3 = \frac{1}{2}\sigma^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

σ^i sind die bekannten Pauli-Matrizen. Die Farbmatriizen τ^a genügen den Vertauschungsrelationen

$$[\tau^3, \tau^+] = \tau^+ \quad , \quad [\tau^3, \tau^-] = -\tau^- \quad , \quad [\tau^+, \tau^-] = \tau^3 \quad . \quad (4.12)$$

Für die Spuren gilt

$$\text{Sp}(\tau^3 \tau^3) = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{Sp}(\tau^+ \tau^-) = \frac{1}{2} \quad . \quad (4.13)$$

Alle anderen Spurkombinationen verschwinden.

In der Lichtkegel-Coulomb-Eichung ist die Nullimpulsmode von $V(x)$, die sogenannte Eichnullmode

$$\langle V \rangle_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx^- V(x^+, x^-) \quad , \quad (4.14)$$

eine von der Lichtkegelzeit abhängige Funktion [139]. Über eine Rotation im Farbraum, in dem keine Richtung ausgezeichnet ist, kann diese diagonalisiert werden

$$V(x^+) = \begin{pmatrix} v(x^+) & 0 \\ 0 & -v(x^+) \end{pmatrix} = \tau^3 v(x^+) \quad . \quad (4.15)$$

$v(x^+)$ ist eine Konstante in longitudinaler und transversaler Richtung. Sie wird als quantenmechanischer Freiheitsgrad behandelt [141].

Die Nullimpulsmode von $A(x^+)$ wählt man in der Farbebene von τ^+ und τ^-

$$\langle \tau^3 A \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & \langle A_+ \rangle_0 \\ \langle A_- \rangle_0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.16)$$

Sie kann zu der festgesetzten Lichtkegelzeit $x_0^+ = 0$ weggeicht werden. Die entscheidende Nullimpulsmode des Skalarfeldes Φ ist die des Feldes φ_3 , die sogenannte Zwangsnullmode. Diese hat einen entscheidenden Effekt auf die Spinverteilung im Proton und steht mit der Infrarot-Regularisierung in der DLCQ im engen Zusammenhang. Sie genügt einer Zwangsbedingungsgleichung (siehe Gleichung (4.19) und Anhang C). Ihr Effekt wird in Kapitel 5 diskutiert. Die Nullimpulsmoden von φ_+ und φ_- sind dynamisch unabhängig.

4.3 Die Farb–Maxwell–Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen, auch die Farb–Maxwell–Gleichungen genannt [140], ergeben sich durch Variation der Lagrangedichte nach den Gluonenfeldern zu

$$\mathcal{J}_G^\alpha = g J_M^\alpha - ig[F^{\alpha\beta}, A_\alpha] \quad , \quad J_M^\alpha = -i[\Phi, D^\alpha \Phi] \quad , \quad (4.17)$$

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} = g \mathcal{J}_G^\alpha \quad , \quad D_\beta F^{\beta\alpha} = g J_M^\alpha \quad , \quad (4.18)$$

$$(D^\alpha D_\alpha + \mu_0^2) \Phi = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Sie definieren den Farb–Maxwell–Strom $\mathcal{J}_G^\alpha(x)$ und in kovarianter Schreibweise den Materiestrom $J_M^\alpha(x)$. Nach dem Noether–Theorem ist der Farb–Maxwell–Gluonenstrom der erhaltene Strom $\partial_\alpha \mathcal{J}_G^\alpha = 0$, wobei als erhaltene Ladung das zeitunabhängige, räumliche Integral über die Lichtkegelzeitkomponente des Gluonenstromes

$$\mathcal{Q}_G(x) = \int_{-L}^L dx^- \mathcal{J}_G^+(x^-, x^+) \quad , \quad \frac{d}{dx^+} \mathcal{Q}_G = 0 \quad , \quad (4.20)$$

definiert wird. Dies folgt aus der Divergenzfreiheit des Gluonenstromes und der Annahme der Periodizität der Felder. Der Materiestrom ist nicht erhalten, es gilt aber $D_\alpha \mathcal{J}_M^\alpha = 0$.

4.3.1 Die longitudinalen Gluonfelder

Die Bewegungsgleichung des Gluonfeldes V schreibt sich kovariant als

$$\begin{aligned} g J_M^- &= \partial_+ \partial_- A - \partial_+^2 V - g^2 [A, [V, A]] \\ &- ig (2 [A, \partial_+ V] - [A, \partial_- A] - [V, \partial_+ A]) \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

In kovarianter Notation lautet die Bewegungsgleichung des Gluonfeldes A

$$D_- F^{-+} = D_- (\partial_+ V - D_- A) = -D_-^2 A = g J_M^+ \quad . \quad (4.22)$$

Die Komponenten dieses Feldes haben die explizite Form

$$-\partial_-^2 A_3 = g J_3^+ \quad , \quad -(\partial_- + igv)^2 A_+ = g J_+^+ \quad , \quad -(\partial_- - igv)^2 A_- = g J_-^+ \quad . \quad (4.23)$$

Die obigen keine Zeitableitung enthaltenden Gleichungen sind weder unabhängige noch quantisierbare Freiheitsgrade mit konjugiertem Impuls. Sie sind redundante Variablen im Hilbert-Raum und werden durch Integration der Gaußschen Gleichungen bestimmt (siehe Anhang B.3).

4.3.2 Das transversale Gluonfeld

Das gluonische Skalarfeld Φ gehorcht der Zwangsgleichung aus (4.19). Explizit hat sie die Gestalt

$$\mu_0^2 \Phi = \partial_- (D_+ + \partial_+) \Phi + ig(\partial_+ [V, \Phi] + [A^\alpha, D_\alpha \Phi]) \quad . \quad (4.24)$$

Die Bewegungsgleichungen der Komponenten im Skalarfeldsektor beinhalten zum einen die dynamischen Gleichungen für die Felder φ_+, φ_- und den Normalmodenfeldanteil φ_3 [142]; sie sind die unabhängigen zu quantisierenden Felder mit konjugiertem Impuls. Zum anderen stellen sie die Zwangsbedingungsgleichung für die Nullimpulsmode von φ_3 (siehe Anhang C).

4.4 Der Dirac–Bergmann–Formalismus

Durch die Lichtkegel–Coulomb–Eichung wird die nicht physikalische Unbestimmtheit der Lagrangedichte nicht vollständig beseitigt. Aufgrund der Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Eichtransformationen gilt

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_+ \omega(x) \quad , \quad (4.25)$$

$$\omega(x^+, x^-) = \omega(x^+, x^- + 2L) + 2\pi l \quad . \quad (4.26)$$

$\omega(x^+, x^-)$ ist die Eichfunktion und $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. Für die Nullimpulsmode des Gluonfeldes $V(x)$ bleiben aufgrund des topologisch wie geometrisch nichttrivialen Konfigurationsraumes große Eichtransformationen, die sogenannten Gribov–Kopien bzw. Z_2 –Symmetrien [143, 144], Verschiebungen um das Vielfache von $\frac{\pi}{g}$ sowie kleine Eichtransformationen wie die Weyl–Spiegelungen und die Spiegelung und Zentrumstransformation

bestehen. Diese müssen durch zusätzliche Eicheinschränkungen auf dem *fundamental modular domain* [144] behoben werden, um die nichtabelsche Theorie eindeutig quantisieren zu können. Substituiert man v durch den dimensionslosen, diagonalen Operator z

$$z = \frac{gvL}{\pi} \quad , \quad (4.27)$$

so lassen sich die Gribov-Kopien als Verschiebungen der Form $z \rightarrow z + 2l$ schreiben. Für die Z_2 -Symmetrien ergeben sich die Verschiebungen $z \rightarrow z + (2l + 1)$, mit $l \in \mathcal{Z}$. Die Weyl-Spiegelungen sind von der Form $z \rightarrow -z$, und für die Spiegelung bzw. Zentrums-
transformation gilt $z \rightarrow (1 - z)$. \mathcal{Z} ist die Menge der ganzen Zahlen. Auf dem endlichen Intervall $0 < z < 1$, dem *fundamental modular domain*, bleibt nur die Zentrums-
transformation, d.h. eine Symmetrie um $z = \frac{1}{2}$, bestehen.

Aufgrund der Beschränkung auf den *fundamental modular domain* können die dynamischen Felder analog zur *instant form* quantisiert werden. Sie sind nach Quantisierung Operatoren, die im Zustandsraum der möglichen physikalischen Zustände wirken. Der Zustandsraum setzt sich aus dem quantenmechanischen Hilbert-Raum \mathcal{H} mit konstanter Teilchenzahl und dem Fockraum \mathcal{F} zusammen. Die Zustände haben die nicht separable Struktur

$$| \Psi_i \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^N c_{r,\nu}^{(i)} \psi_r | \nu \rangle \quad , \quad c_{r,\nu}^{(i)} \neq c_r^{(i)} c_{\nu}^{(i)} \quad , \quad \psi_r \in \mathcal{H} \quad , \quad | \nu \rangle \in \mathcal{F} \quad . \quad (4.28)$$

Nach der Quantisierungsbedingung hat der quantenmechanische Freiheitsgrad z den konjugierten Impuls

$$\pi_z \equiv \frac{\delta}{\delta z} \int dx^- \mathcal{L} = \frac{2\pi^2}{g^2 L} \partial_+ z = \frac{2\pi}{g} \partial_+ v \quad . \quad (4.29)$$

z und π_z genügen der Kommutatorrelation

$$[z, \pi_z] = i \quad . \quad (4.30)$$

Diese ist für jeden physikalischen Zustand bei $x^+ = 0$ erfüllt. In der Wellenfunktionsdarstellung läßt sich z (z' und z'' als reell-hermitesch $z'^{\dagger} = z'$) schreiben als

$$\psi_r(z) = \langle z | r \rangle \quad , \quad z | z' \rangle = z' | z' \rangle \quad , \quad \langle z' | \pi_z | z'' \rangle = -i \frac{\partial}{\partial z'} \delta(z' - z'') \quad . \quad (4.31)$$

Der im Sinne der Quantisierungsvorschrift zum Skalarfeld Φ konjugierte Impuls Π ist gemäß

$$\begin{aligned} \Pi = D_- \Phi &= \partial_- \Phi + i g [V, \Phi] \\ &= \partial_- \Phi + i g v [\tau^3, \varphi_3 \tau^3 + \varphi_+ \tau^+ + \varphi_- \tau^-] \end{aligned} \quad (4.32)$$

definiert. Die konjugierten Impulse zu den einzelnen Feldkoordinaten sind

$$\pi^3 = \partial_- \varphi_3 \quad , \quad \pi^\mp = (\partial_- \pm igv) \varphi_\pm \quad . \quad (4.33)$$

In der Schreibweise der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Gluonen im Fockraum werden diese Operatoren unter Berücksichtigung der Periodizität der Randbedingungen in eine Fourier-Reihe entwickelt. Eine Untersuchung des Skalarfeldes Φ in der Basis aus Gleichung (4.9) zeigt, daß φ_3 ein reelles Feld ist und φ_\pm komplexe Felder sind. Nach Quantisierung wirkt die Operatorfunktion φ_3 im Fockraum \mathcal{F} . Ausgenommen von der Quantisierungsprozedur ist die Nullimpulsmode

$$\overset{o}{\varphi}_3 := \frac{a_0(x^+)}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad (4.34)$$

die kein Freiheitsgrad, sondern eine Funktion aller Felder und des Massenterms ist. Die Fourier-Darstellung von φ_3 hat die Gestalt

$$\varphi_3(x^-, x^+) = \frac{a_0(x^+)}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \left(a_l(x^+) w_l e^{-il\frac{\pi}{L}x^-} + a_l^\dagger(x^+) w_l e^{il\frac{\pi}{L}x^-} \right) \quad . \quad (4.35)$$

$a_l^\dagger(x^+)$ und $a_l(x^+)$ sind die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im sogenannten a -Sektor des Fockraumes \mathcal{F} . Der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ ergibt sich aufgrund der Substitution von z durch $\zeta = z - \frac{1}{2}$ im *fundamental modular domain*. Der Summationsindex symbolisiert ganzzahlige Impulse. Das konjugierte Impulsfeld

$$\pi^3 = \frac{i\pi}{\sqrt{4\pi} L} \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \left(a_l^\dagger(x^+) \frac{1}{w_l} e^{il\frac{\pi}{L}x^-} - a_l(x^+) \frac{1}{w_l} e^{-il\frac{\pi}{L}x^-} \right) \quad (4.36)$$

zu φ_3 ist eine reine Normalmode, da die Nullimpulsmode $\overset{o}{\varphi}_3$ im Impulsausdruck verschwindet. Aus der Kommutatorrelation zu gleicher Lichtkegelzeit $x_0^+ = 0$ folgt

$$w_l = \frac{1}{\sqrt{l}} \quad (4.37)$$

als Entwicklungskoeffizient gemäß

$$\frac{1}{i} \left[\overset{n}{\varphi}_3(x), \pi^3(y) \right]_{x_0^+ = y_0^+} = \frac{1}{2} \left(\delta_L(x^- - y^-) - \frac{1}{2L} \right) \quad , \quad (4.38)$$

mit $\overset{n}{\varphi}_3(x)$ als reiner Normalmodenanteil zu φ_3 (siehe auch [145]). Der Term $-\frac{1}{2L}$ in Gleichung (4.38) schließt das Mitnehmen der Nullimpulsmode aus. Die Funktion

$$\delta_L(x^-) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} e^{ik\frac{\pi}{L}x^-} \quad , \quad (4.39)$$

$$\delta(x^-) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \delta_L(x^-) \quad , \quad \int_{-L}^L dx^- \delta_L(x^-) = 1 \quad (4.40)$$

ist die Fourier-Entwicklung der δ -Funktion auf dem Intervall $[-L, +L]$. Für die Kommutatorrelation der Normalmoden gilt

$$[a_k, a_l^\dagger] = \delta_k^l \quad (k, l = 1, \dots, \infty) \quad . \quad (4.41)$$

In den obigen Relationen tritt die Zwangsnullmode a_0 nicht auf. Die Bezeichnung der Zwangsnullmode a_0 ist nicht zu verwechseln mit jener der singulettten Axialladung $a^0(Q^2)$ aus Kapitel 1.

a_0 genügt der Ungleichung $[a_0, a_l] \neq 0$ und der Zwangsgleichung aus (4.19). Diese Gleichung wird im Zusammenhang mit Kapitel 5 in Anhang C.2 mit einer Diagrammmethode nach Kalloniatis [146] untersucht.

Die komplexen Felder

$$\varphi_+(x^-) = \varphi_-^\dagger(x^-) \quad , \quad (4.42)$$

die nicht diagonalen Komponenten des Skalarfeldes Φ , werden wegen ihrer Abhängigkeit von z ebenfalls auf dem *fundamental modular domain* quantisiert. Der zu φ_- konjugierte Impuls ist π^- . Das andere Konjugationspaar wird über die hermitesche Konjugation konstruiert. Beide Komponenten erfüllen die kanonischen Kommutatorrelationen

$$\frac{1}{i} [\varphi_-(x), \pi^-(y)]_{x_0^+ = y_0^+} = \frac{1}{i} [\varphi_+(x), \pi^+(y)]_{x_0^+ = y_0^+} = \delta_L(x^- - y^-) \quad (4.43)$$

bei gleicher Lichtkegelzeit $x_0^+ = 0$. Die Impulsmodenentwicklung

$$\varphi_-(x^-) = \sum_{l \in \mathcal{Z}} \frac{\tilde{c}_l(x_0^+)}{\sqrt{2\pi |l + \frac{vgL}{\pi}|}} e^{-il\frac{\pi}{L}x^-} = \sum_{l \in \mathcal{Z}} \frac{\tilde{c}_l(x_0^+)}{\sqrt{2\pi |l + z|}} e^{-il\frac{\pi}{L}x^-} \quad (4.44)$$

genügt den obigen Kommutatorrelationen. Für $\tilde{c}_l(x_0^+)$ gilt die Vorschrift

$$[\tilde{c}_l(x_0^+), \tilde{c}_{l'}^\dagger(x_0^+)] = \delta_l^{l'} \operatorname{sgn}(l + z) \quad . \quad (4.45)$$

Die Signumfunktion für beliebiges z ist asymmetrisch. Um eine eindeutige Interpretation für \tilde{c}_l und \tilde{c}_l^\dagger als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der Gluonen zu erhalten, wird eine Verschiebung um einen Wert $m_0(z) \in \mathcal{B}$, mit $\mathcal{B} \equiv \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots, \pm\infty$ vorgenommen. Den Summationsindex l ersetzt man durch $m - m_0$. Ein x^- -abhängiger Phasenfaktor wird damit vor die Summe gezogen. \tilde{c}_{m-m_0} wird in c_m umbenannt. Daraus folgt nach [139]

$$\varphi_-(x^-) = \frac{e^{im_0\frac{\pi}{L}x^-}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathcal{B}} \frac{c_m(x_0^+)}{\sqrt{|m + z - m_0|}} e^{-im\frac{\pi}{L}x^-}, \quad (4.46)$$

mit

$$\left[c_m, c_{m'}^\dagger \right] = \delta_m^{m'} \operatorname{sgn}(m + z - m_0) \quad . \quad (4.47)$$

Die Verschiebungskonstante $m_0(z) \in \mathcal{B}$ läßt sich durch die Stufenfunktion

$$m_0(z) = \operatorname{st}(z) - \frac{1}{2} \quad , \quad \operatorname{st}(z) = \begin{cases} [z] + 1 & : z \geq 0 \\ [z] & : z < 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

ausdrücken. $[z]$ ist die *entier*-Funktion von z . Aus $\operatorname{st}(z) + \operatorname{st}(-z) = 1$ ergibt sich

$$m_0(z+1) = m_0(z) + 1 \quad , \quad m_0(-z) = -m_0(z) \quad . \quad (4.49)$$

Führt man die neue Variable

$$\zeta(z) = z - m_0(z) \quad , \quad \zeta(z+1) = \zeta(z) \quad , \quad \zeta(-z) = -\zeta(z) \quad (4.50)$$

ein, mit $m_0 = \frac{1}{2}$ im *fundamental modular domain*, so werden die Spiegelung und die Zentrumstransformation von z beseitigt. Nach Gleichung (4.50) ist $\zeta(z)$ auf dem Intervall $-\frac{1}{2} < \zeta(z) < \frac{1}{2}$ definiert. $\varphi_-(x)$ und $\varphi_+(x)$ schreiben sich jetzt als eindeutige Entwicklungen

$$\varphi_-(x^-) = \frac{e^{im_0 \frac{\pi}{L} x^-}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(b_m u_m e^{-im \frac{\pi}{L} x^-} + d_m^\dagger v_m e^{im \frac{\pi}{L} x^-} \right) \quad (4.51)$$

und

$$\varphi_+(x^-) = \frac{e^{-im_0 \frac{\pi}{L} x^-}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(b_m^\dagger u_m e^{im \frac{\pi}{L} x^-} + d_m v_m e^{-im \frac{\pi}{L} x^-} \right) \quad . \quad (4.52)$$

Sie sind mit den periodischen Randbedingungen verträglich. Die Operatoren b_m und d_m wirken als Vernichtungsoperatoren, die Operatoren d_m^\dagger und b_m^\dagger als entsprechende Erzeugungsoperatoren verschiedener Gluonen im b - bzw. d -Sektor des Fockraumes \mathcal{F} . Es gilt $b_m := c_m$ und $d_m^\dagger := c_{-m}$. Der Index m geht über halbzahlige Impulse. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren kommutieren nach den bosonischen Relationen

$$\left[b_m, b_{m'}^\dagger \right] = \left[d_m, d_{m'}^\dagger \right] = \delta_m^{m'} \quad , \quad \left[b_m, d_{m'} \right] = \left[b_m, d_{m'}^\dagger \right] = 0 \quad . \quad (4.53)$$

Die Koeffizienten u_m und v_m ergeben sich aus der Kommutatorrelation in (4.47) zu

$$u_m := \frac{1}{\sqrt{m + \zeta(z)}} \quad , \quad v_m := \frac{1}{\sqrt{m - \zeta(z)}} \quad . \quad (4.54)$$

Für die konjugierten Impulse gilt

$$\pi_+ = \frac{i\pi}{\sqrt{4\pi} L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(b_m^\dagger \frac{1}{u_m} e^{i(m-m_0) \frac{\pi}{L} x^-} - d_m \frac{1}{v_m} e^{-i(m+m_0) \frac{\pi}{L} x^-} \right) \quad (4.55)$$

und

$$\pi_- = \frac{i\pi}{\sqrt{4\pi} L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(d_m^\dagger \frac{1}{v_m} e^{i(m+m_0) \frac{\pi}{L} x^-} - b_m \frac{1}{u_m} e^{-i(m-m_0) \frac{\pi}{L} x^-} \right) . \quad (4.56)$$

Im *fundamental modular domain* gibt es demnach nur eine Eichtransformation $\zeta \rightarrow \zeta + 1$. Sie erzeugt die Verschiebung $m_0 \rightarrow m_0 + 1$. Allein die Phase von $\varphi_\pm(x^-)$ wird verändert, nicht die Erzeuger–Vernichterzuweisung. Das Fockraum–Vakuum bleibt unter dieser Transformation invariant.

4.5 Die Eigenwertgleichung

Die Erhaltungsgrößen, d.h. die Farbladung Q_3 , der Lichtkegelimpuls P^+ und die Lichtkegelenergie P^- , werden im weiteren über die Gluonenoperatoren ausgedrückt, um die Heisenbergsche Eigenwertgleichung im Impulsraum aufstellen zu können. Die Gluonoperatoren wirken im Fockraum. Dieser wird von den Zuständen der Gestalt

$$|\nu\rangle = a_{l_1}^{i\dagger} \dots a_{l_N}^{i\dagger} b_{m_1}^{i\dagger} \dots b_{m_N}^{i\dagger} d_{m'_1}^{i\dagger} \dots d_{m'_N}^{i\dagger} |0\rangle \quad (4.57)$$

aufgespannt. Die l_β sind ganzzahlige, die m_β und m'_β halbzahlige, diskrete Impulse der verschiedenen Gluonen aus dem jeweiligen a - bzw. b - oder d -Gluonensektor; $\beta = 1, 2, 3, \dots N$ gibt die Anzahl der Teilchenzuständen an. Für das Fockraum–Vakuum gilt

$$a_{l_\beta}^i |0\rangle = b_{m_\beta}^i |0\rangle = d_{m'_\beta}^i |0\rangle = 0 \quad . \quad (4.58)$$

Der Index $i = 1, 2, 3$ steht für die Farb-Antifarbzustände ($r = \text{rot}$, $b = \text{blau}$)

$$1 = \frac{r\bar{r} - b\bar{b}}{\sqrt{2}} \quad , \quad 2 = r\bar{b} \quad , \quad 3 = b\bar{r} \quad . \quad (4.59)$$

P^-, P^+ und Q_3 kommutieren miteinander und können damit unabhängig voneinander diagonalisiert werden. Die Diagonalisierung von P^-, P^+ und Q_3 ist wichtig für die Diagonalisierung der Matrix der systemunabhängigen und Lorentz-invarianten quadratischen Masse $M^2 = 2P^+P^-$ und ebenso für die Bestimmung der Masseneigenwerte und Eigenfunktionen der Gluonentheorie. Zusätzlich müssen diese die Bedingung

$$Q_3 |phys\rangle = 0 \quad (4.60)$$

erfüllen, mit $|phys\rangle$ als physikalische Zustände. Zur numerischen Berechnung des Problems wird das endliche Gitter im Impulsraum verwendet. Dazu transformiert man die Konstanten der Bewegung und die Farbladung in den Impulsraum.

4.5.1 Die Farbladung

In der zweitquantisierten Form erhält man nach Einsetzen der Ausdrücke aus den Gleichungen (4.51), (4.52), (4.55) und (4.56) in die Gleichung (B.3)

$$Q_3 = \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} (b_m^\dagger b_m - d_m^\dagger d_m) \quad . \quad (4.61)$$

Zustände mit gleicher Teilchenzahl b und d genügen dieser Gleichung. Die Gluonen treten demnach immer als gebundene neutrale Zustände auf. Farbgeladene Zustände der Gluonen können als lokale Farbladungsdichten trotz der obigen Einschränkungen erklärt werden.

4.5.2 Der Lichtkegelimpuls

Der Lichtkegelimpuls P^+ ist aufgrund der Eigendarstellung diagonal

$$P^+ = \int_{-L}^L dx^- T^{++} = \int_{-L}^L \left(\partial_- \varphi_3 \varphi_3 + 2 (\partial_- + igv) \varphi_+ (\partial_- - igv) \varphi_- \right) dx^- \quad . \quad (4.62)$$

Mit den Feldentwicklungen und den zu ihnen konjugierten Impulsen aus Abschnitt 4.4 ergeben sich für den Grundzustand von P^+ nach Normalordnung zwei Gluonenoperatorausdrücke

$$\begin{aligned} : P^+ : &= \frac{\pi}{L} \sum_{l=1}^{\infty} a_l^\dagger a_l w_l^2 + \frac{\pi}{L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \left(b_m^\dagger b_m \frac{1}{u_m^2} + d_m^\dagger d_m \frac{1}{v_m^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{L} \sum_{l=1}^{\infty} a_l^\dagger a_l l + \frac{\pi}{L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \left(b_m^\dagger b_m (m + \zeta) + d_m^\dagger d_m (m - \zeta) \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Bei Änderungen von ζ und unter großen Eichtransformationen ist der obige Ausdruck invariant. Um die Diskretisierungsperiode L außer acht lassen zu können, wird der neue Impulsoperator \hat{K} gemäß

$$: P^+ : = \frac{\pi}{L} \hat{K} \quad (4.64)$$

eingeführt. Dieser wird als die *harmonische Auflösung* bezeichnet. Jeder feste Eigenwert von \hat{K} bedingt eine endliche Fockraum-Dimension, da alle Impulse diskret sind. Dies wiederum führt zu endlichen Matrizen, welche numerisch diagonalisiert werden können. Um bei den numerischen Berechnungen auf das Kontinuum $K \rightarrow \infty$ zu schließen, werden hohe K -Werte herangezogen und die Folge der Eigenwerte auf Konvergenz untersucht.

4.5.3 Die Lichtkegelenergie

Die Lichtkegelenergie P^- ist ein nicht diagonalen Operator von komplizierter Struktur im Hilbert-Raum. Sie beschreibt die Wechselwirkung von zwei skalaren Materieströmen in Richtung einer Gluonen-ähnlichen instantanen Wechselwirkung. Um

$$\begin{aligned} P^-(x) &= \int_{-L}^L dx^- T^{+-} = \int_{-L}^L dx^- \text{Sp} \left(F^{+-} F^{+-} + \mu_0^2 \Phi \Phi \right) \\ &= \int_{-L}^L dx^- \text{Sp} \left(\partial_+ V - D_- A + \mu_0^2 \Phi \Phi \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

im Impulsraum darzustellen, geht man zunächst zur Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} P^- &= L (\partial_+ v)^2 + \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \partial_- A_3 \partial_- A_3 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \left((\partial_- + igv) A_+ (\partial_- - igv) A_- + (\partial_- - igv) A_- (\partial_- + igv) A_+ \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \mu_0^2 (\varphi_3 \varphi_3 + \varphi_+ \varphi_- + \varphi_- \varphi_+) \end{aligned} \quad (4.66)$$

über. Nach partieller Integration der Integrale $\int_{-L}^L (\partial_- \mp igv) A_{\mp} (\partial_- \pm igv) A_{\pm}$ und Berücksichtigung der Periodizität der Randbedingungen wird P^- zu

$$\begin{aligned} P^- &= L (\partial_+ v)^2 \\ &- \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \left(A_3 (\partial_-)^2 A_3 + A_+ (\partial_- - igv)^2 A_- + A_- (\partial_- + igv)^2 A_+ \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \mu_0^2 (\varphi_3 \varphi_3 + \varphi_+ \varphi_- + \varphi_- \varphi_+). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Die Komponenten des Feldes A können nach den Gauß-Gleichungen durch die Ströme $J_M^\alpha(x^-)$ ausgedrückt werden (siehe Anhang B.3). Dazu ersetzt man die obigen Differentialoperatoren durch die Greenschen Funktionen G_1, G_2, G_3 aus Anhang B.3 und substituiert $L(\partial_+ v)$ nach Gleichung (4.29). P^- ist dann

$$\begin{aligned} P^- &= -\frac{g^2 L}{4\pi^2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} g^2 \int_{-L}^L dx^- \left(J_3^+ G_1 J_3^+ + J_-^+ G_2 J_+^+ + J_+^+ G_3 J_-^+ \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L dx^- \mu_0^2 (\varphi_3 \varphi_3 + \varphi_+ \varphi_- + \varphi_- \varphi_+) \quad . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Das n über J_3^+ gibt den Normalmodenanteil von J_3^+ an. Zur Strukturuntersuchung wird P^- in den diskreten Fourierraum transformiert. Die Ströme $\tilde{J}_3(k), \tilde{J}_+(k)$ und $\tilde{J}_-(k)$ (siehe

Anhang B.2) ersetzt man durch die Summe aus den Ladungen $Q_3(k)$, $Q_+(k)$ und $Q_-(k)$ und den symmetrischen Resttermen $\frac{B_k}{u_k}$ und $\frac{D_k}{v_k}$. Auf diese Weise kann die Zwangsnullmode a_0 vollständig separiert und gesondert betrachtet werden. Zusätzlich wird die Diskretisierungsperiode L über die Substituierung

$$P^- = \frac{L}{\pi} \hat{H} \quad (4.69)$$

herausfaktorisiert. \hat{H} ist der neue Lichtkegelenergieoperator. Die Kopplung $\frac{g^2}{16\pi}$ wird durch \hat{g}^2 substituiert. In der effektiven $(1+1)$ -dimensionalen Theorie besitzt \hat{g} die Dimension einer Masse. Nach den erwähnten Ersetzungen läßt sich die Gleichung (4.68) folgendermaßen umschreiben

$$\begin{aligned} \hat{H} = & - 4\hat{g}^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} + 2\hat{g}^2 \left(\sum_{k=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} w_k^4 Q_3^\dagger(k) Q_3(k) + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(v_k^4 Q_+^\dagger(k) Q_+(k) + u_k^4 Q_-^\dagger(k) Q_-(k) \right) \right) \\ & + \hat{g}^2 \left(\sum_{k=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} w_k^4 [Q_3(k), Q_3^\dagger(k)] + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(v_k^4 [Q_+(k), Q_+^\dagger(k)] + u_k^4 [Q_-(k), Q_-^\dagger(k)] \right) \right) \\ & + 2\hat{g}^2 \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(u_k^3 \left(B_k^\dagger Q_-(k) + Q_-^\dagger(k) B_k \right)_s + v_k^3 \left(D_k^\dagger Q_+(k) + Q_+^\dagger(k) D_k \right)_s \right) \\ & + \hat{g}^2 : \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(u_k^2 \left(B_k B_k^\dagger + B_k^\dagger B_k \right) + v_k^2 \left(D_k D_k^\dagger + D_k^\dagger D_k \right) \right) : \\ & + \frac{\mu_0^2}{4} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} w_k^2 + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} u_k^2 + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} v_k^2 \right) \\ & + \frac{\mu_0^2}{2} \left(\sum_{k=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} w_k^2 a_k^\dagger a_k + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(u_k^2 b_k^\dagger b_k + v_k^2 d_k^\dagger d_k \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.70)$$

\hat{H} hat unterschiedliche Operatorstrukturen, die in drei Anteile zusammengefaßt werden können

$$\hat{H} = H_{Eich} + H_{Fock} + H_{Zwang} . \quad (4.71)$$

H_{Eich} enthält den kinetischen Term $-4\frac{d^2}{d\zeta^2}$ sowie die vollständig kontrahierten Terme

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = & \hat{g}^2 \left(\sum_{k=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} w_k^4 \langle 0 | [Q_3(k), Q_3^\dagger(k)] | 0 \rangle + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} v_k^4 \langle 0 | [Q_+(k), Q_+^\dagger(k)] | 0 \rangle \right. \\ & \left. + \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} u_k^4 \langle 0 | [Q_-(k), Q_-^\dagger(k)] | 0 \rangle \right) \equiv V_0(\zeta) . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Diese sind mit dem Fockraum–Vakuumerwartungswert identisch. H_{Eich} ist nur eine Funktion von ζ , nicht aber von den Gluonenoperatoren. H_{Fock} ist der übrige von ζ und den Gluonenoperatoren abhängige Fockraum–Anteil, d.h. abzüglich Gleichung (4.72) und ohne Berücksichtigung der Zwangsnullmode a_0 . Zur genaueren Untersuchung von H_{Fock} setzt man die Ausdrücke der Fockraum–Operatoren für die Ladungen $Q_3(k)$, $Q_+(k)$ und $Q_-(k)$ aus Anhang B in H_{Fock} ein und schreibt diese als Summe aus normalgeordneten Produkten und normalgeordneten Kontraktionen. Es ergeben sich Terme mit einem Erzeugungsoperator und einem Vernichtungsoperator, genannt *Contractions* $H_C(\zeta)$, Terme mit zwei Erzeugungsoperatoren und zwei Vernichtungsoperatoren, genannt *Seagulls* H_S , sowie Terme mit einem Erzeuger und drei Vernichtern oder drei Erzeugern und einem Vernichter, genannt *Forks* H_F ,

$$H_{Fock} = H_C + H_S + H_F \quad . \quad (4.73)$$

Die expliziten Ausdrücke sind in Anhang D mit den zugehörigen Graphen und der entsprechenden renormierten Masse μ für den Zwei–Teilchenraum zusammengefaßt. Die *Contractions* $H_C(\zeta)$ entstehen aus der Normalordnung von P^- und sind ein Maß für die Selbstenergie der Gluonen. Die *Seagulls* H_S erhalten die Teilchenzahl in einem ausgewählten Fockraum–Sektor. Die *Forks* H_F ändern die Teilchenzahl um zwei Teilchen.

H_{Zwang} setzt sich aus allen Anteilen zusammen, in denen die Zwangsnullmode linear und quadratisch auftritt, und ist von ζ , μ und den Fockraum–Operatoren abhängig.

Betrachtet man die Massenquadrate im Impulsraum, so werden sie nach Gleichung (3.11) über das Heisenberg–Eigenwertproblem

$$M^2 | \Psi \rangle = 2 \hat{K} \hat{H} | \Psi \rangle = 2 K_i H_i | \Psi \rangle \quad (4.74)$$

mit der Einschränkung nach (4.60) bestimmt. Die Eigenfunktionen müssen Zusammensetzungen von Fockraum–Zuständen und den quantenmechanischen Wellenfunktionen

$$| \Psi_i \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^N c_{r,\nu}^{(i)} \psi_r | \nu \rangle \quad (4.75)$$

sein, denn \hat{K} und \hat{H} hängen sowohl von den Fockraum–Operatoren als auch von der Eich- und Zwangsnullmode ab. Nach der Definition der Kommutatorrelationen (4.41) und (4.53) bei gleicher Lichtkegelzeit vertauschen die Operatoren \hat{K} und \hat{H} . Aufgrund der Vertauschung und der Diagonalität von \hat{K} in seiner Eigendarstellung sind die Matrixelemente der invarianten Masse zwischen den Zuständen i zu verschiedenen Eigenwerten gleich Null

$$\langle K, i; \zeta | 2 \hat{K} \hat{H} | \zeta'; i, K' \rangle = 0 \quad , \quad (4.76)$$

für $K \neq K'$, mit $|\nu\rangle = |i, K\rangle$ als Fockraum-Basiszustände zu gleicher harmonischen Auflösung \hat{K} . Es gilt also

$$\langle K, i; \zeta | \hat{K} | \zeta'; j, K' \rangle = \delta_{K, K'} \delta_{i, j} \delta(\zeta - \zeta') K \quad . \quad (4.77)$$

Es ist möglich, die Zustände nach ihren Gesamtimpulsen zu ordnen und die Matrix auf blockdiagonale Gestalt zu bringen. Jeder Unterraum zu festem \hat{K} des vollständigen Fockraumes ist einzeln diagonalisierbar. Für jeden Teilsektor ergibt sich

$$2\hat{K} \int d\zeta' \sum_j \langle K, i; \zeta | \hat{H} | \zeta'; j, K \rangle \langle K, j; \zeta' | \Psi_i \rangle = M^2 \langle K, i; \zeta | \Psi_i \rangle \quad . \quad (4.78)$$

Demnach wäre allein das Fockraum-Vakuum $|0\rangle$ der Eigenzustand zum kleinstmöglichen Wert von \hat{K} , nämlich $K = 0$ und damit der Grundzustand in der hier betrachteten Gluonentheorie, wenn die Nullimpulsmoden des Eich- und Zwangsfeldes unberücksichtigt blieben. Unter Berücksichtigung dieser Nullimpulsmoden wird das physikalische Vakuum strukturiert, und der Grundzustand ist nicht *trivial*.

Kapitel 5

Zwangsnulmode und Polarisation

5.1 Die Struktur des gluonischen Vakuums

Der Hamiltonoperator \hat{H} aus Gleichung (4.70) besitzt aufgrund der Abhängigkeit von den Nullimpulsmoden einen nicht verschwindenden Erwartungswert. Um den Grundzustand der Gluontheorie sowie dessen Polarisationsseigenschaften zu untersuchen, wird \hat{H} in den Fockraum–Vakuumsektor projiziert

$$\langle 0; \zeta | \hat{H} | \zeta'; 0 \rangle \langle 0; \zeta' | \psi_r; 0 \rangle = E \langle 0; \zeta | \psi_r; 0 \rangle \quad . \quad (5.1)$$

Gemäß der Lichtkegel–Coulomb–Eichung und unter Vermeidung der Gribov–Kopien ist der Hilbert–Raum auf den *fundamental modular domain* beschränkt. In diesem Intervall kann der von $\zeta = z - \frac{1}{2}$ abhängige nicht verschwindende Erwartungswert untersucht werden. Die Eichfreiheit tritt in den Randbedingungen auf, die von der Nullimpulsmodenwellenfunktion auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ erfüllt werden.

Wegen der Singularitäten an den Intervallgrenzen $\zeta = \pm \frac{1}{2}$ ist das Energiespektrum diskret und kann in der Schrödinger–Wellenfunktionsdarstellung anstelle einer Fockentwicklung behandelt werden [140, 142]. In dieser Darstellung läßt sich der Operator ζ mit der Quantenzahl r wie folgt schreiben als

$$\psi_r(\zeta) = \langle \zeta | r \rangle \quad . \quad (5.2)$$

Nach Projektion des Hamiltonoperators in den Fockraum–Vakuumsektor, dem Eich–Zwang–Sektor, genügt der Operator der Schrödingergleichung

$$H_{EZ} \psi_r(\zeta) = \left(-4\hat{g}^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} + V(\zeta) \right) \psi_r(\zeta) = E_r \psi_r(\zeta) \quad . \quad (5.3)$$

Das *effektive Potential*

$$V(\zeta) = V_0(\zeta) + V_\mu(\zeta) + V_a(\zeta) \quad (5.4)$$

setzt sich aus dem von der dynamischen Eichnullmode des Gluonfeldes abhängigen Potentialterm $V_0(\zeta)$, dem massenabhängigen Term $V_\mu(\zeta)$ und dem von der Zwangsnullmode a_0 des Skalarfeldes abhängigen Potentialterm $V_a(\zeta)$ zusammen. Der Potentialterm des Zwangsanteils ist der für die Polarisierung bzw. Depolarisierung des Grundzustandes der Gluontheorie entscheidende Ausdruck und für die Spinverteilung im Proton von Bedeutung. Der massenabhängige Term $V_\mu(\zeta)$ dient der Renormierung des Eichpotentialanteils $V_0(\zeta)$ der Theorie. Ohne die Abhängigkeit von den Nullimpulsmoden wäre das Vakuum das einfache Fockraum-Vakuum und nicht eine Superposition der ζ -Eichnullmode und der Zwangsnullmode.

$\psi_0(\zeta)$ ist das Grundzustandswellenfunktional der Schrödingergleichung. Mit diesem Funktional kann der vollständige Grundzustand der Theorie als Tensorprodukt dargestellt werden

$$|\Omega\rangle \equiv \psi_0(\zeta) \otimes |0\rangle \quad . \quad (5.5)$$

Für das Potential $V(\zeta)$ tritt eine Symmetrie $V(-\zeta) = V(\zeta)$ auf, da für die Koeffizienten $u_m(-\zeta) = v_m(\zeta)$ bzw. $v_m(-\zeta) = u_m(\zeta)$ gilt, d.h. $V(\zeta)$ ist um $\zeta = 0$ symmetrisch. $V(\zeta)$ wird an den Grenzen des *fundamental modular domain* $\zeta = \pm \frac{1}{2}$ gemäß $\frac{1}{(\zeta \pm \frac{1}{2})^2}$ positiv unendlich. Das Potential ist an den Rändern durchtunnelbar. Über eine Rotation im Farbraum (siehe [147]) wird das Verschwinden der Wellenfunktionen an den Ränder gewährleistet. Die Rotation führt zu der um eine Jacobi-Determinante modifizierten Schrödingergleichung der Form

$$H_{EZ} = -2\hat{g}^2 \frac{1}{\cos^2(\pi\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \cos^2(\pi\zeta) \frac{d}{d\zeta} + V(\zeta) \quad . \quad (5.6)$$

5.1.1 Skalenabhängigkeit

Zur Untersuchung der Potentialanteile wird eine definierte Skala und die Kopplung \hat{g} festgelegt. Nach Multiplikation der Kopplung mit einer beliebigen Konstanten bleiben die Verhältnisse der Eigenwerte konstant und unabhängig von der gewählten Multiplikationskonstanten

$$\hat{g} \rightarrow \hat{g}' = \text{const} \cdot \hat{g} \quad , \quad \mu \rightarrow \mu' = \text{const} \cdot \mu \quad , \quad M_i \rightarrow M'_i = \text{const} \cdot M_i \quad . \quad (5.7)$$

Das Massenspektrum ist eine Funktion des dimensionslosen Verhältnisses $\frac{\mu}{2\hat{g}}$. Um das Skalenverhalten zu beschreiben, werden die Variablen

$$2\hat{g} \equiv \tilde{\mu}\tilde{g} \quad , \quad \mu \equiv \tilde{\mu}\sqrt{1 - \tilde{g}^2} \quad (5.8)$$

definiert. Löst man diese Gleichungen nach den neuen Variablen auf, so folgt

$$\tilde{g} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4\hat{g}^2}}} \quad , \quad \tilde{\mu} = \sqrt{\mu^2 + 4\hat{g}^2} \quad . \quad (5.9)$$

Die dimensionslose Kopplung \tilde{g} liegt damit im Intervall $[0, 1]$, $\tilde{\mu}$ hat die Dimension einer Masse. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{g} \rightarrow 1 & \quad , \quad \rho \rightarrow 0 & \quad \text{starke Kopplung} \\ \tilde{g} \rightarrow 0 & \quad , \quad \rho \rightarrow \infty & \quad \text{schwache Kopplung.} \end{aligned}$$

Im Bereich kleiner effektiver Kopplung zwischen den Gluonen kann das Hochenergie-Gluonenspektrum mit Hilfe eines Kastenpotentialansatzes berechnet werden, siehe Abschnitt 5.1.2. Bei effektiver Masse $\rho = 0$ ergibt sich aufgrund der Dominanz der Zwangsnullmode ein Potential mit zwei entarteten Minima, das mit Hilfe eines doppelten Oszillators behandelt werden kann, siehe die Abschnitte 5.1.3 und 5.2.

5.1.2 Der Eichanteil

Der von der Zwangsnullmode a_0 unabhängige Potentialanteil $V_0(\zeta)$ stimmt mit den vollständig kontrahierten Termen des Fockraum-Anteils überein und beinhaltet die Ausdrücke von $Q^\dagger(k)|0\rangle \neq 0$. Nach Anhang B.2 schreibt sich der normalgeordnete Ausdruck als

$$\begin{aligned} V_0(\zeta) = & \hat{g}^2 \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\frac{u_m}{v_n} - \frac{v_n}{u_m} \right)^2 w_{m+n}^4 \\ & + \hat{g}^2 \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right)^2 v_{m+l}^4 + \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right)^2 u_{m+l}^4 \right) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Werte für $u_n(\zeta)$, $v_n(\zeta)$ und $w_n(\zeta)$ sind den Gleichungen (4.37) und (4.54) zu entnehmen. Setzt man diese Werte in das obige Potential ein, so erhält man

$$\begin{aligned} V_0(\zeta) = & \hat{g}^2 \left(\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \frac{((m+\zeta) - (n-\zeta))^2}{(m+n)^2(m+\zeta)(n-\zeta)} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\frac{(m-l+\zeta)^2}{l(m+\zeta)(l+m+\zeta)^2} + \frac{(m-l-\zeta)^2}{l(m-\zeta)(l+m-\zeta)^2} \right) \right) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Der Potentialanteil $V_{\mu_0}(\zeta)$ ohne die Zwangsnullmode a_0 hat nach Gleichung (4.70) die normalgeordnete Struktur

$$V_{\mu_0}(\zeta) = \frac{\mu_0^2}{4} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \frac{1}{l} + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \frac{1}{(m+\zeta)} + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \frac{1}{(m-\zeta)} \right) . \quad (5.12)$$

Zur Beseitigung der logarithmisch divergenten Terme im Eichpotential

$$V_{Eich}^{\mu_0}(\zeta) = V_0(\zeta) + V_{\mu_0}(\zeta) \quad (5.13)$$

wird die Gleichung (5.12) umgeschrieben, indem die renormierte Masse eingeführt wird [146]

$$\frac{\mu^2}{4} = \frac{\mu_0^2}{4} + 2\hat{g}^2 \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \frac{1}{m} \quad . \quad (5.14)$$

Die renormierte Masse wird ebenfalls für die Absorption der Divergenzen der *Contraction*-Terme aus Anhang D.1 verwendet. Im Kontinuums limites gilt $\mu \rightarrow 0$.

Setzt man das renormierte Eichpotential in die Schrödingergleichung (5.6) ein, so kann das nicht analytisch zu behandelnde Eigenwertproblem approximativ als ein Eigenwertproblem mit unendlichem Kastenpotential auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ für ζ betrachtet werden. Wie bei der nichtabelschen $SU(2)$ Theorie auf dem Zylinder ergeben sich für die Wellenfunktionen die normierten Sinusfunktionen [148]

$$\psi_r = \sqrt{2} \sin \left(\pi(r+1)(\zeta + \frac{1}{2}) \right) \quad , \quad (5.15)$$

mit $r = 0, 1, 2, 3, \dots \infty$ als Basis auf dem *fundamental modular domain* und den Energiewerten $E_r = 4\pi^2(r+1)^2$. Aus der Schrödingergleichung wird die Matrixgleichung

$$\sum_{r'} \langle \psi_r | H_{Eich} | \psi_{r'} \rangle \langle \psi_{r'} | \Psi \rangle = E_r \langle \psi_r | \Psi \rangle \quad . \quad (5.16)$$

Unter Berücksichtigung der Basiszustände im quantenmechanischen Hilbertraum aus Gleichung (5.15) und der Fockraum-Basiszustände aus Gleichung (4.57) kann die Integralgleichung (4.78) gelöst und die Auswirkung der dynamischen Eichnullmode des Gluonfeldes im *tube model* analysiert werden [142]. Durch die Kopplung der dynamischen Eichnullmode an den Fockraum der reinen Gluontheorie werden die Massenquadrategieenwerte gegenüber jenen des reinen Fockraumes um 21 % herabgesetzt, siehe [142, 149].

5.1.3 Der Zwangsanteil

Für die vollständige Untersuchung des Gluonspektrums ist der Zwangsanteil $V_a(\zeta)$ heranzuziehen. Um diesen Einfluß zu bestimmen, wird der Eichanteil des Hamiltonoperators, der vom Fockraum-Anteil nicht separierbar ist, eingefroren.

Die linearen und quadratischen Terme in a_0 des Lichtkegel-Hamiltonoperators

$$\begin{aligned} H_{Zwang}^1 &= 2\hat{g}^2 \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(u_k^3 \left(B_k^\dagger Q_-(k) + Q_-^\dagger(k) B_k \right)_s + v_k^3 \left(D_k^\dagger Q_+(k) + Q_+^\dagger(k) D_k \right)_s \right), \\ H_{Zwang}^2 &= \hat{g}^2 : \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(u_k^2 \left(B_k B_k^\dagger + B_k^\dagger B_k \right) + v_k^2 \left(D_k D_k^\dagger + D_k^\dagger D_k \right) \right) : \end{aligned} \quad (5.17)$$

aus Gleichung (4.70) sind für die Berechnung des Vakuumerwartungswertes des Zwangsanteils $V_a(\zeta)$ entscheidend. Die Ladungen Q_\pm und die die Zwangsnullmode a_0 enthaltenen Terme B_k und D_k sind in Anhang B.2 in den Gleichungen (B.15), (B.16) und (B.17) definiert.

Unter Berücksichtigung der Zwangsnullmode sind die Terme H_{Zwang}^1 und H_{Zwang}^2 projiziert in den Vakuumsektor nicht Null. Die Kommutatoren $[a_0, b_k]$ und $[a_0, b_k^\dagger]$ verschwinden nicht, da $a_0 = a_0(a_l^\dagger, b_m^\dagger, d_m^\dagger, a_l, b_m, d_m; \zeta, \mu)$. Lösungen der Zwangsnullmode werden über die Zwangsgleichung aus (4.19) ermittelt. Im Impulsraum gilt für die Zwangsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} & \left(\left(b_m^\dagger b_m a_0 + b_m^\dagger a_0 b_m + a_0 b_m^\dagger b_m + (b_m a_0 b_m^\dagger - a_0) \right) u_m^2 \right. \\ & \left. + \left(d_m^\dagger d_m a_0 + d_m^\dagger a_0 d_m + a_0 d_m^\dagger d_m + (d_m a_0 d_m^\dagger - a_0) \right) v_m^2 \right) + \hat{\rho}(\zeta) a_0 \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{m+n}^l \left(a_l^\dagger b_m d_n + a_l b_m^\dagger d_n^\dagger \right) \left(v_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) + u_m^3 \left(\frac{w_l}{v_n} + \frac{v_n}{w_l} \right) \right) \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{l+m}^n \left(a_l^\dagger b_m^\dagger b_n + a_l b_m b_n^\dagger \right) \left(u_m^3 \left(\frac{w_l}{u_n} + \frac{u_n}{w_l} \right) + u_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) \right) \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{l+m}^n \left(a_l^\dagger d_m^\dagger d_n + a_l d_m d_n^\dagger \right) \left(v_m^3 \left(\frac{v_n}{w_l} + \frac{w_l}{v_n} \right) + v_n^3 \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Für $\hat{\rho}(\zeta)$ setzt man

$$\hat{\rho}(\zeta) = \rho + G(\zeta) = \rho + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\frac{1}{m+\zeta} + \frac{1}{m-\zeta} - \frac{2}{m} \right). \quad (5.19)$$

Die algebraische Herleitung und Transformation in den Impulsraum ist Gegenstand des Anhangs C.

Allerdings ist die obige Operatorgleichung aufgrund der Komplexität der Zwangsnullmode bisher nicht für den Hoch- und Niedrigenergiebereich gelöst. Numerische Berechnungen und nichtstörungstheoretische Techniken werden noch untersucht [150].

Ein iterativer Ansatz ist in Gleichung (C.17) wie folgt angegeben

$$a_0 = \sum_{l,m,n} \left[\mathcal{C}_0^{lmn}(\zeta) \delta_{m+n}^l (a_l^\dagger b_m d_n + h.c.) + \mathcal{C}_1^{lmn}(\zeta) \delta_{m+l}^n (b_n^\dagger b_m a_l + h.c.) + \mathcal{C}_1^{lmn}(-\zeta) \delta_{m+l}^n (d_n^\dagger d_m a_l + h.c.) \right]. \quad (5.20)$$

Die Koeffizienten \mathcal{C}_0^{lmn} und \mathcal{C}_1^{lmn} sind in Gleichung (C.19) des Anhangs definiert. Im schwachen Kopplungslimes führt dieser Ansatz dazu, daß $\langle 0|a_0|0\rangle = 0$ ist und die Theorie Z_2 -symmetrisch ist. Die Theorie kann dann wie in Abschnitt 5.1.2 behandelt werden.

Im starken Kopplungslimes ergibt sich eine andere Struktur. Im folgenden wird gezeigt, daß die Zwangsnullmode a_0 für $\hat{g} = 0$ eine neue Wechselwirkung initiiert und die Z_2 -Symmetrie der Theorie bricht. Wie in der $(1+1)$ -dimensionalen ϕ^4 -Theorie (siehe dazu [53, ?]) existieren zwei Hamiltonoperatoren mit $\langle 0|a_0|0\rangle > 0$ und $\langle 0|a_0|0\rangle < 0$, die äquivalente Spektren erzeugen. Durch die Auswahl eines Hamiltonoperators kann die Theorie in gleicher Weise definiert werden wie durch die Auswahl eines Vakuums in der *equal-time*-formulierten Theorie. Multiple Vakua können durch multiple Hamiltonoperatoren ersetzt werden. Die Z_2 -Symmetriebrechung erscheint im Hamiltonoperator.

Projiziert man den Zwangsanteil des Hamiltonoperators in den Vakuumsektor, so erhält man für den linearen Term

$$\begin{aligned} \langle 0 | H_{Zwang}^1 | 0 \rangle &= \\ \frac{\hat{g}^2}{2} \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \sum_{m,n=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \delta_{m+l}^n &\left[u_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) \left(\langle 0 | a_l b_m a_0 b_n^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | b_m a_0 a_l^\dagger b_m^\dagger | 0 \rangle \right) \right. \\ &+ \left. v_n^3 \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) \left(\langle 0 | a_l d_m a_0 d_n^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | d_m a_0 a_l^\dagger d_m^\dagger | 0 \rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Der quadratische Term hat die Gestalt

$$\langle 0 | H_{Zwang}^2 | 0 \rangle = \hat{g}^2 \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[u_m^2 \left(\langle 0 | b_m a_0^2 b_m^\dagger | 0 \rangle + v_m^2 \langle 0 | d_m a_0^2 d_m^\dagger | 0 \rangle \right) \right]. \quad (5.22)$$

Die relevanten Beiträge zum Vakuumerwartungswert stammen von den Matrixelementen von a_0 des niedrigsten Teilchensektors. Für $\langle 0 | H_{Zwang}^2 | 0 \rangle$ ergibt sich dies nach Einführen eines vollständigen Satzes der Zustände zwischen die zwei Operatoren der Zwangsnullmode. Setzt man die iterative Lösung für die Zwangsnullmode aus (5.20) bzw. (C.17) in

die Gleichungen (5.21) und (5.22) ein, so folgt für das Zwangspotential

$$\langle 0 | H_{Zwang} | 0 \rangle = \langle 0 | H_{Zwang}^1 + H_{Zwang}^2 | 0 \rangle = V_a(\zeta) = \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} -2\hat{g}^2 \sum_{l=1}^{\Lambda+\frac{1}{2}} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[\right. & \left((m+\zeta)(m+l+\zeta)(m-l+\zeta) - 2 \frac{(m+\zeta)^2 + l(m+l+\zeta)}{\mathcal{D}_{m,m+l}^1(\zeta)} \right) \\ & \cdot \left(\frac{(m+\zeta)^2 + l(m+l+\zeta)}{l(m+\zeta)^3(m+l+\zeta)^4 \mathcal{D}_{m,m+l}^1(\zeta)} \right) \\ & + \left((m-\zeta)(m+l-\zeta)(m-l-\zeta) - 2 \frac{(m-\zeta)^2 + l(m+l-\zeta)}{\mathcal{D}_{m,m+l}^1(-\zeta)} \right) \\ & \cdot \left(\frac{(m-\zeta)^2 + l(m+l-\zeta)}{l(m-\zeta)^3(m+l-\zeta)^4 \mathcal{D}_{m,m+l}^1(-\zeta)} \right) \left. \right], \end{aligned}$$

wobei für $\mathcal{D}_{m,m+l}^1$ die Definition aus Gleichung (C.20) verwendet wurde. Die niedrigsten Moden mit $m = \frac{1}{2}$ sind die Hauptbeiträge für die ζ -Abhängigkeit. Jede Struktur, die im *fundamental modular domain* erscheint, entsteht im wesentlichen aus diesem Freiheitsgrad. Höhere Impulsterme sind kleine Fluktuationen um ζ . Das Verhalten des Zwangspotentials ist für $\rho = 0$ bei kleinen *cutoff*-Werten Λ in Abbildung 5.1 dargestellt.

Geht man von dem iterativen Lösungsansatz (5.20) für a_0 aus und variiert ρ im Wertebereich von 0 bis 100, so ergibt sich, daß bei $\rho = 0$ der Einfluß der Zwangsnullmode und die Kopplung \tilde{g} zwischen den Gluonen im Kontinuumslimites maximal wird. Im Zwangspotential entsteht aufgrund des Einflusses von a_0 eine Schwelle im Zentrum des *fundamental modular domain*, die bedingt, daß die Energieniveaus entarten und sich zwei Mulden ausbilden.

Bei ρ -Werten größer 0 und kleiner 20 bildet sich eine vernachlässigbare *peakähnliche* Struktur um $\zeta = 0$. Bei ρ -Werten größer als $\rho = 20$ ist das Potential im *fundamental modular domain* flach und nimmt approximativ die Form eines Kastenpotentials an. Das Spektrum wird mit anwachsender effektiver Masse ρ , d.h. bei kleiner werdender effektiver Kopplung zwischen den Gluonen, von dem Eichpotential dominiert.

Im Falle $\rho = 0$ entstehen im Potential offensichtlich zusätzliche logarithmischen Divergenzen, welche die Z_2 -Symmetrie brechen und hinter denen eine neue Art der Wechselwirkung steht. Diese Divergenzen lassen sich nicht über den Massenterm aus Gleichung (5.14) bzw. (C.13) beheben, der für die Absorption der Divergenzen der *Contractions* in Anhang D.1, der Terme des Eichpotentials und der Zwangsgleichung aus (C.12) verwendet wurde. Der dimensionslose Parameter

$$\rho = \frac{\mu^2}{4\hat{g}^2} \quad (5.24)$$

benötigt zusätzliche *cutoff*-abhängige Terme. Man begegnet hier dem noch offenen Forschungspunkt der Renormierung auf dem Lichtkegel, der im engen Zusammenhang mit den Nullimpulsmoden steht, siehe dazu [151].

Das hier verwendete *tube model* kann regularisiert werden. Im folgenden wird die Potentialstruktur für $\Lambda \rightarrow \infty$ untersucht. Es zeigt sich, daß sich mit dem obigen Zwangspotential für $\Lambda \rightarrow \infty$ endliche Massenquadrategieenwerte berechnen lassen.

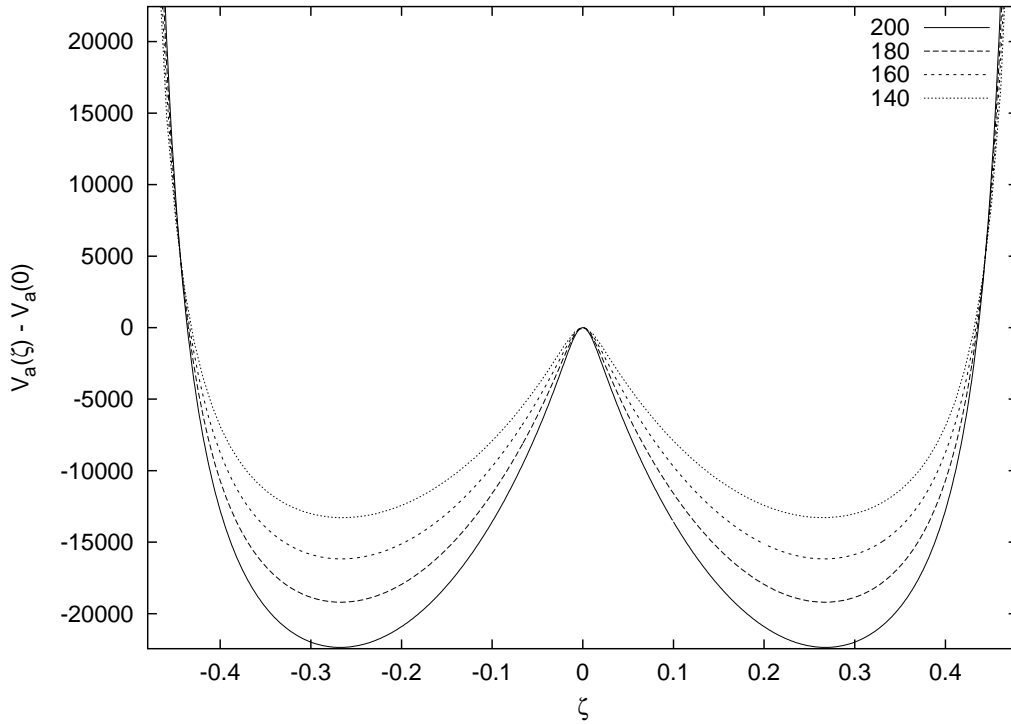


Abbildung 5.1: Die Gestalt des Zwangspotentials bei eingeschaltetem a_0 ($\rho = 0$, $\Lambda = 140, 160, 180, 200$)

5.2 Das doppelte Oszillatorpotential

Das Zwangspotential in Abbildung 5.1 wird für den Fall starker Kopplung mit Hilfe eines doppelten Oszillatorpotential mit variabler Barrierenhöhe als Parameter approximiert, dessen höchster Barrierepunkt bei $\xi = 0$ auf den Nullpunkt bezogen ist. Der Einfluß der Zwangsnullmode wird für $\Lambda \rightarrow \infty$ untersucht. Dabei wird die Gestalt des doppelten Oszillatorpotentials mit den entsprechenden Eigenfunktionen angegeben und zur Extraktion des Gluonspektrums die Zwei-Teilchennäherung herangezogen. Da die untersten Eigenzustände des Gluonspektrums hauptsächlich aus Zwei-Teilchenzuständen bestehen, eignet sich eine derartige Approximation für die Untersuchung der Auswirkung der Vaku-

umstruktur auf die unteren Massenquadrategiezustände des Gluonspektrums. Dies wird in Abschnitt 5.3 vorgenommen.

Λ	κ	λ	$\psi_0^\pm (\pm 0, 5)$
100	0.263	232437.624	$0.307 \cdot 10^{-1}$
140	0.265	378480.961	$0.854 \cdot 10^{-2}$
180	0.267	538621.021	$0.290 \cdot 10^{-2}$
220	0.268	711476.712	$0.108 \cdot 10^{-3}$
260	0.269	896316.730	$0.428 \cdot 10^{-4}$
300	0.270	1093339.669	$0.172 \cdot 10^{-4}$
340	0.271	1293799.394	$0.783 \cdot 10^{-5}$
380	0.271	1511014.114	$0.328 \cdot 10^{-5}$
420	0.272	1723433.227	$0.165 \cdot 10^{-5}$
460	0.272	1954187.808	$0.744 \cdot 10^{-6}$
500	0.273	2175647.046	$0.407 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.1: κ -, λ -Werte und ψ_0^\pm -Intervallgrenzwerte ausgewählter Λ -cutoff's

Unter Annahme einer doppelten Oszillatorstruktur für das Potential des *fundamental modular domain* mit $\rho = 0$ und unter Berücksichtigung, daß das Potential an der Stelle $\zeta = 0$ ebenfalls Null ist, ergibt sich die Schrödingergleichung

$$-4 \frac{d^2 \psi_r(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \lambda (|\zeta| - \kappa)^2 \psi_r(\zeta) = \left(E_r + \frac{1}{2} \lambda \kappa^2\right) \psi_r(\zeta) = E'_r \psi_r(\zeta) \quad , \quad (5.25)$$

mit den Randbedingungen $\zeta \rightarrow \pm \frac{1}{2}$. κ ist der Wert für ζ an den Minima des Potentials, der sich aus den Daten des Zwangspotentials ergibt, und λ ein Kopplungsparameter, der von der Höhe der Barriere in der Mitte des Zwangspotentials abhängt. Die Werte von κ und λ zu verschiedenen Λ -cutoff-Werten sind in Tabelle 5.1 zu finden. Die Randbedingungen des Eigenwertproblems können aufgrund der Tatsache, daß die Lösungen für das Potential an den Rändern mit $e^{-\alpha \zeta^2}$ ($\alpha > 0$) schnell abfallen, für die Grundzustandslösungen durch die Randbedingungen $\zeta \rightarrow \pm \infty$ in guter Näherung ersetzt und über die ausgeartete hypergeometrische Differentialgleichung berechnet werden, siehe Anhang E. Für die normierten Lösungen ergibt sich

$$\psi_n^\pm(\zeta) = \begin{cases} \sqrt[8]{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} Z_n \left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta - \kappa) \right) & (\zeta \geq 0) \\ \pm \sqrt[8]{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} Z_n \left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta + \kappa) \right) & (\zeta \leq 0) \end{cases} \quad , \quad (5.26)$$

mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ als Basis auf dem *fundamental modular domain*. Die Aufspaltung der Eigenfunktionen rührt daher, daß es aufgrund der verbleibenden Symmetrie $\zeta \rightarrow -\zeta$ des Potentials eine verknüpfte Quantenzahl gibt, welche die Wellenfunktionen in symmetrische $\psi_n^+(\zeta)$ und antisymmetrische $\psi_n^-(\zeta)$ Zustände klassifiziert. Das Teilchenspektrum kann identischerweise entweder über das Vakuum, beschrieben durch $\psi_0^+(\zeta)$ oder $\psi_0^-(\zeta)$, gewonnen werden, wobei

$$\psi_0^\pm(\zeta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8\pi^2}{\lambda}} e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \frac{(\zeta-\kappa)^2}{4}} & (\zeta \geq 0) \\ \pm \sqrt{\frac{8\pi^2}{\lambda}} e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \frac{(\zeta+\kappa)^2}{4}} & (\zeta \leq 0) \end{cases} . \quad (5.27)$$

Beide Darstellungen unterscheiden sich nur durch eine Verschiebung in der Energie. Auf diese Weise erscheinen die Z_2 -Vakua, Analoga der θ -Vakua, in der hier betrachteten Gluontheorie im *fundamental modular domain*. Die Zwangsnullmode bedingt eine Symmetriebrechung des Vakuums.

Die Eigenfunktionen sind für die verschiedenen Λ -*cutoff*-Werte in Abbildung 5.2 dargestellt. Die nahe Null liegenden Werte an den Grenzen des *fundamental modular domain* sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Mit höherem Wert des *cutoff* nimmt die Genauigkeit zu, daß die Wellenfunktion an den Grenzen des Intervalls verschwindet. Werte kleiner als $\Lambda = 140$ werden für die Berechnung der Eigenwerte für $\Lambda \rightarrow \infty$ nicht miteinbezogen.

5.3 Die Zwei-Teilchennäherung

Unter Berücksichtigung von (5.27) gilt für die Eigenwertgleichung in der von der Zwangsnullmode dominierten Grundzustandsbasis

$$\begin{aligned} 2 \hat{K} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta (\psi_0^\pm(\zeta))^\dagger \langle K; i | H_{Zwang} + H_{Fock} | j; K \rangle \psi_0^\pm(\zeta) \\ = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta (\psi_0^\pm(\zeta))^\dagger \langle K; i | M^2 | j; K \rangle \psi_0^\pm(\zeta) \quad . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Der Anteil H_{Zwang} läßt sich aufgrund der adiabatischen Einschaltung von a_0 schreiben als

$$2 \hat{K} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta (\psi_0^\pm(\zeta))^\dagger H_{Zwang} \psi_0^\pm(\zeta) \langle K; i | j; K \rangle = 2 K \delta_{ij} E_0 \quad , \quad (5.29)$$

mit $E_0 = \sqrt{2\lambda} - \frac{1}{2}\lambda\kappa^2$ als Grundzustandseigenwert im Zwangsektor. Renormiert man die Grundzustandsenergie auf Null, so gilt

$$\tilde{E}_n := E_n - E_0 = \sqrt{8\lambda} n \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_0 := 0 \quad , \quad (5.30)$$

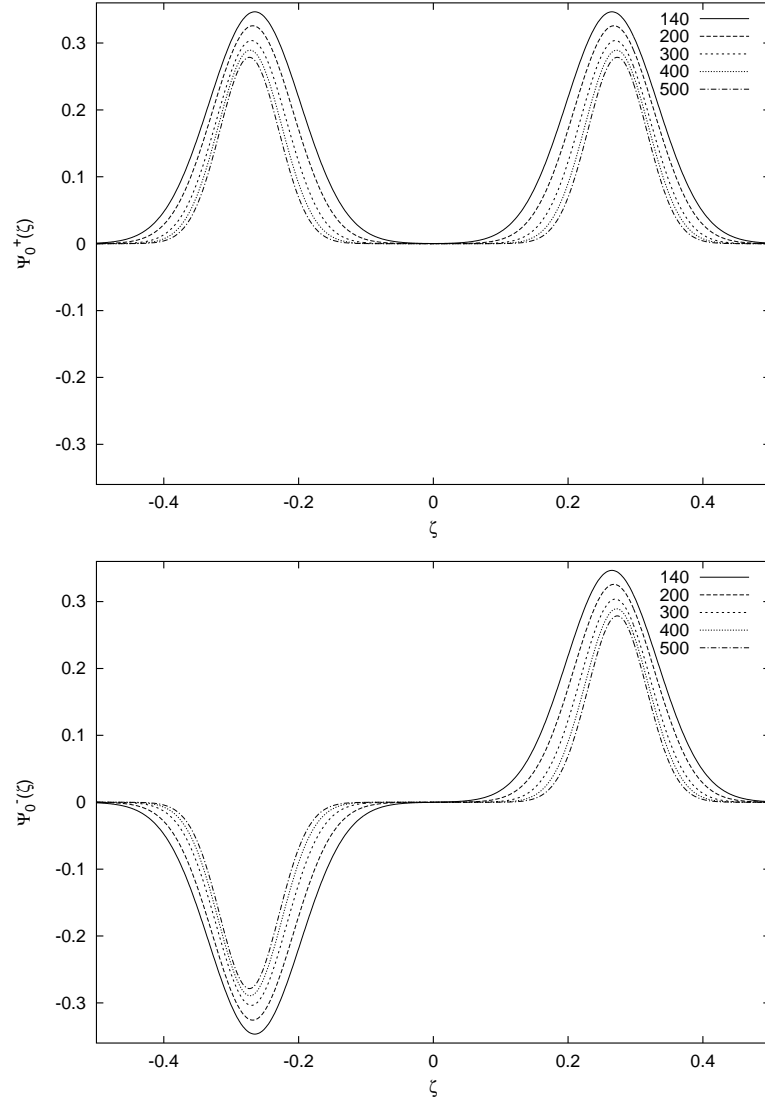


Abbildung 5.2: Die ψ_0^\pm -Eigenfunktionen für $\Lambda = 140, 200, 300, 400, 500$.

wobei $E_n = \sqrt{8\lambda}(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\lambda\kappa^2$, siehe Anhang E. Es folgt

$$2 \hat{K} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta (\psi_0^\pm(\zeta))^\dagger \langle K; i | H_{Fock} | j; K \rangle \psi_0^\pm(\zeta) \quad . \quad (5.31)$$

Um die untersten Masseneigenwerte bei hohen Werten der harmonischen Auflösung K zu untersuchen, d.h. die Matrix aus (5.31) diagonalisieren zu können, wird der Fockraum aus Gründen der Rechenzeit und des Computerspeicherplatzes abgeschnitten und ein Zwei-Teilchensektor betrachtet [152]. Untersuchungen von Dalley und Klebanov [122]–[124] haben ergeben, daß die Beschränkung auf einen mit der Tamm–Dankoff–Methode abgeschnittenen Teilchenraum für das hier betrachtete Gluonmodell ohne Berücksichtigung der Nullimpulsmoden eine gute Approximation an den vollen Fockraum darstellt. Der

Zwei-Teilchensektor ist der niedrigste Sektor, der Teilchenwechselwirkungen beinhaltet. Er besteht aus dem tiefsten Zustand des neutralen, gebundenen Gluon-Gluon-Paares. Es werden zwei Klassen von orthogonalen Zuständen

$$|aa\rangle_l \equiv a_l^\dagger a_{K-l}^\dagger |0\rangle \quad l = 1, \dots, \left[\frac{K}{2}\right], \quad (5.32)$$

$$|bd\rangle_m \equiv b_m^\dagger d_{K-m}^\dagger |0\rangle \quad m = \frac{1}{2}, \dots, K - \frac{1}{2} \quad (5.33)$$

definiert, mit K als Eigenwert der harmonischen Auflösung. Der Summationsindex $\left[\frac{K}{2}\right]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich dem numerischen Wert $\frac{K}{2}$ ist. Die Wahl des Index schließt das doppelte Auftreten der Zustände $|aa\rangle_n$ aus, für die nach der Vertauschungsrelation (4.41)

$$|aa\rangle_l = |aa\rangle_{K-l} \quad , \quad l = 1, \dots, K-1 \quad (5.34)$$

ist. Die aufgrund der Vertauschbarkeit von Bosonen mögliche Doppelzählung wird damit vermieden. Für die Zwei-Teilchenzustände folgt

$$|\Psi_i\rangle = \sum_{l=1}^{\left[\frac{K}{2}\right]} c_{0,l}^{(i)} \psi_0^\pm(\zeta) a_l^\dagger a_{K-l}^\dagger |0\rangle + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{K-\frac{1}{2}} c_{0,m}^{(i)} \psi_0^\pm(\zeta) b_m^\dagger d_{K-m}^\dagger |0\rangle \quad . \quad (5.35)$$

Die orthogonalen Zustände aus (5.32) und (5.33) sind Eigenzustände zu den Operatoren Q_3 und \hat{K}

$$Q_3 |aa\rangle_l = 0 \quad , \quad Q_3 |bd\rangle_m = 0 \quad (5.36)$$

$$\hat{K} |aa\rangle_l = K |aa\rangle_l \quad , \quad \hat{K} |bd\rangle_m = K |bd\rangle_m \quad , \quad (5.37)$$

für alle l, m . Die Matrix des Lichtkegelenergieoperators aus Gleichung (5.31) besteht im Zwei-Teilchensektor aus drei Anteilen: dem Anteil des reinen aa -Sektors

$$\begin{aligned} {}_{l'}\langle aa | \hat{H} | aa \rangle_l &= \langle 0 | a_{l'} a_{K-l'} | H_C + H_S | a_l^\dagger a_{K-l}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left[\frac{I_l(\zeta)}{l} + \frac{I_{K-l}(\zeta)}{K-l} \right] (\delta_l^{l'} + \delta_{K-l}^l) \quad , \end{aligned} \quad (5.38)$$

jenem des reinen bd -Sektors

$$\begin{aligned} {}_{m'}\langle bd | \hat{H} | bd \rangle_m &= \langle 0 | b_{m'} d_{K-m'} | H_C + H_S | b_m^\dagger d_{K-m}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left[\frac{J_m(\zeta)}{m+\zeta} + \frac{J_{K-m}(-\zeta)}{K-m-\zeta} \right] \delta_m^{m'} + S_{bd}(\zeta) \end{aligned} \quad (5.39)$$

und dem Kopplungsanteil zwischen beiden Sektoren

$$\begin{aligned} {}_{\nu'} \langle aa | \hat{H} | bd \rangle_m &= \langle 0 | a_{\nu'} a_{K-\nu'} | H_C + H_S | b_m^\dagger d_{K-m}^\dagger | 0 \rangle \\ &= S_{aa}(K-l', l'; m, K-m; \zeta) + S_{aa}(l, K-l; m, K-m; \zeta), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} {}_{m'} \langle bd | \hat{H} | aa \rangle_l &= \langle 0 | b_{m'} d_{K-m'} | H_C + H_S | a_l^\dagger a_{K-l}^\dagger | 0 \rangle \\ &= S_{aa}(K-l, l; m', K-m'; \zeta) + S_{aa}(l, K-l; m', K-m'; \zeta). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Ausdrücke für $I_l(\zeta)$, $J_m(\zeta)$, $S_{aa}(\zeta)$ und $S_{bd}(\zeta)$ sind den in den Anhängen D.1 und D.2 aufgelisteten Termen der *Contractions* und *Seagulls* zu entnehmen. Die *Forks* tragen aufgrund der Drei-Teilchenerzeugung oder -vernichtung nicht bei. Damit hat die Matrix (5.31) im Zwei-Teilchensektor mit eingeschalteter Zwangsnullmode die Gestalt

$$2\hat{K} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta \begin{pmatrix} {}_{\nu'} \langle aa | \hat{H} | aa \rangle_l & {}_{\nu'} \langle aa | \hat{H} | bd \rangle_m \\ {}_{m'} \langle bd | \hat{H} | aa \rangle_l & {}_{m'} \langle bd | \hat{H} | bd \rangle_m \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{\lambda}} \frac{8\pi^2}{\lambda} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{(\zeta-\kappa)^2}{2}} & (\zeta \geq 0) \\ \sqrt{\frac{4}{\lambda}} \frac{8\pi^2}{\lambda} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{(\zeta+\kappa)^2}{2}} & (\zeta \leq 0) \end{cases} \quad (5.42)$$

Im Hochenergiebereich ohne Zwangsnullmodeneffekt hat man anstelle der Wellenfunktion ψ_0^\pm die Grundzustandswellenfunktion ψ_0 aus Gleichung (5.15) zu setzen. Für jene Matrix des Zwei-Teilchensektors folgt

$$2\hat{K} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\zeta \begin{pmatrix} {}_{\nu'} \langle aa | \hat{H} | aa \rangle_l & {}_{\nu'} \langle aa | \hat{H} | bd \rangle_m \\ {}_{m'} \langle bd | \hat{H} | aa \rangle_l & {}_{m'} \langle bd | \hat{H} | bd \rangle_m \end{pmatrix} \cdot 2 \sin^2 \left(\pi \left(\zeta + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (5.43)$$

5.4 Quantenphasenübergang in der Gluonmaterie

Für die Lorentzinvarianz im Kontinuumlimes wird

$$K \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad \Lambda \rightarrow \infty \quad (5.44)$$

durchgeführt. P^+ aus Gleichung (4.64) ist endlich. Die Forderung $K \rightarrow \infty$ wird durch Extrapolation an die numerisch berechneten Werte für wachsendes K erfüllt. Die harmonische Auflösung \hat{K} legt die maximalen Einteilchenimpulse in den Basiszuständen aus Gleichung (4.57) fest. Die Masseneigenwerte konvergieren für sehr hohe K -Werte gegen feste Werte. Die Abhängigkeit von Λ wird im Hochenergiebereich über die im Abschnitt 5.1.2 vorgenommene Massenrenormierung beseitigt. Im Niedrigenergiebereich läßt sich das *colour flux tube model* für $\Lambda \rightarrow \infty$ regularisieren und endliche Massenquadrategieenwerte können berechnet werden. Die Periode L geht in die Massenspektren nicht ein, da sie sich aus der Eigenwertgleichung herauskürzt.

Die Massenquadrategieenwerte der Matrizen aus (5.42) und (5.43) werden mit Hilfe des Programmpakets in Anhang C berechnet. Die Integrale in den Matrizen werden numerisch ausgewertet. Die Integrationen werden mit der Basis-Spline-Interpolation nach Dunaevskiy [153] in Kombination mit spezifisch abgeänderter Lapack-Bibliothek durchgeführt. Die Diagonalisierungsroutine gründet sich auf dem Jacobi-Eigenwert-Algorithmus für symmetrisch quadratische Matrizen und wurde von [153] zur Verfügung gestellt.

Die Abbildung 5.3 zeigt die Ergebnisse des Gluonspektrums bei der Kopplung $\tilde{g} \rightarrow 0$ ohne eingeschaltete Zwangsnullmode berechnet im Kastenpotential des Eichsektors. Untersucht werden K -Werte zwischen $K = 21$ und $K = 201$. In Tabelle 5.2 sind die zugehörigen Zahlenwerte der Massenquadrategieenwerte der ersten fünf Zustände explizit angegeben.

Den Abbildungen in 5.4–5.7 sind die Ergebnisse des Spektrums bei der Kopplung $\tilde{g} \rightarrow 1$ zu entnehmen. Sie entsprechen dem Fall des dem doppelten Oszillator ähnlichen Zwangspotentials. Es sind K -Werte zwischen $K = 21$ und $K = 201$ bei variabel eingeschalteter Zwangsnullmode, d.h. bei variablem Parameter $\Lambda = 200, 300, 400, 500$ berechnet. Die Eigenwerte der ersten fünf Massenquadrategieenwerte des Gluonspektrums sind zu den verschiedenen Λ -Werten in den Tabellen 5.3–5.6 aufgelistet. Die Massenquadrategieenwerte sind auf die Kopplung \hat{g}^2 bezogen.

Aus den berechneten Werten ergeben sich für alle betrachteten Fälle diskrete Spektren. Für wachsende K - und Λ -Werte sind die Spektren stabil. Betrachtet man in der Zwei-Teilchennäherung die ersten drei Zustände, so werden die Niveauabstände mit steigendem M^2 und K (bzw. Λ) kleiner. Der größte Niveauabstand liegt für alle Spektren unter Berücksichtigung der ersten drei Zustände zwischen dem ersten und dem zweiten Massenquadrategieenwert. Nach Vergleich der Werte zu den Abbildungen 5.3–5.7 ergibt sich, daß die Massenquadrategieenwerte M^2 des Hochenergiebereichs (siehe Tabelle 5.2 und Abbildung 5.3) deutlich über denen des Niedrigenergiebereichs liegen. Um dies explizit zu zeigen, wird der Eigenwert des untersten Massenquadrats für den Kontinuumlimes in der Zwei-Teilchennäherung mit Hilfe einer Extrapolation für $K \rightarrow \infty$ und $\Lambda \rightarrow \infty$ untersucht.

In Abbildung 5.9 auf Seite 83 ist der unterste Eigenwert für den Hochenergiebereich als Funktion von $\frac{1}{\ln K}$ und M aufgetragen. Als oberster K -Wert wurde aufgrund der sehr gut konvergierenden Numerik $K = 201$ gewählt. Der Eigenwert des Hochenergiebereichs kann gemäß der Extrapolationskurve

$$\frac{M_{Kasten}(K)}{\hat{g}} = 7.7527 + \frac{5.0719}{(\ln K)} - \frac{7.0576}{(\ln K)^2} \quad (5.45)$$

beschrieben werden. Er konvergiert gegen den festen dimensionslosen Wert von 7.75 (siehe Abbildung 5.9).

K	M_{Kasten}^2				
21	74.982	421.971	806.095	1231.007	1691.171
51	73.703	408.661	753.428	1114.191	1491.531
81	72.968	404.997	740.270	1085.023	1440.043
111	72.463	403.130	734.087	1071.567	1416.396
141	72.083	401.949	730.430	1063.739	1402.721
171	71.789	401.121	727.991	1058.585	1393.778
201	71.532	400.480	726.219	1054.919	1387.435

Tabelle 5.2: Die Werte der ersten fünf Zustände zu Abbildung 5.3 für ausgewählte K -Werte.

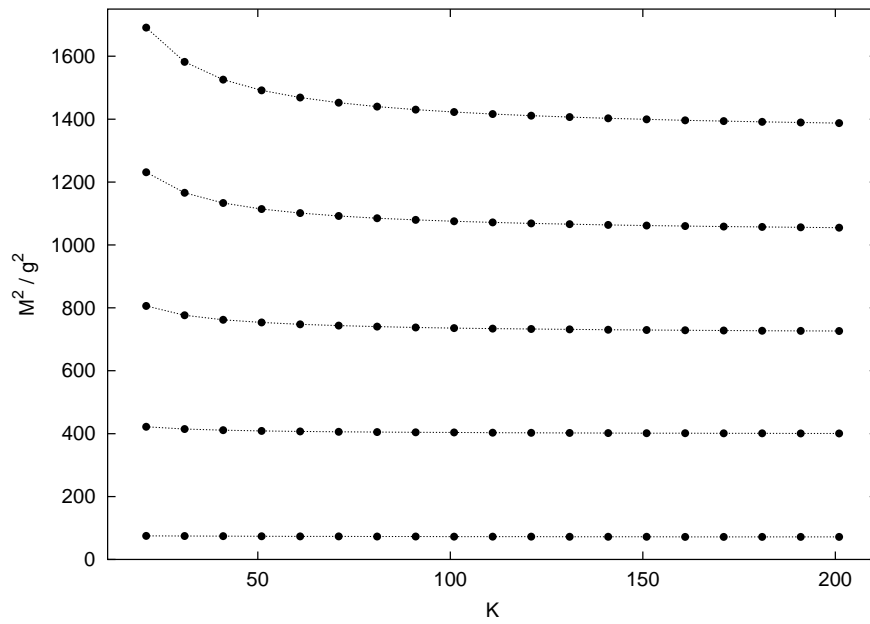


Abbildung 5.3: Die ersten fünf Massenquadrat-eigenwerte des Gluonspektrums für das Kastenpotential.

K	$M_{\Lambda=200}^2$				
21	1.918	10.492	20.477	31.846	44.386
51	1.871	9.748	18.080	27.023	36.574
81	1.853	9.563	17.473	25.758	34.432
111	1.842	9.477	17.196	25.178	33.443
141	1.835	9.428	17.037	24.845	32.874
171	1.829	9.395	16.934	24.630	32.505
201	1.822	9.377	16.866	24.483	32.250

Tabelle 5.3: Die Werte der ersten fünf Zustände zu Abbildung 5.4 für ausgewählte K -Werte

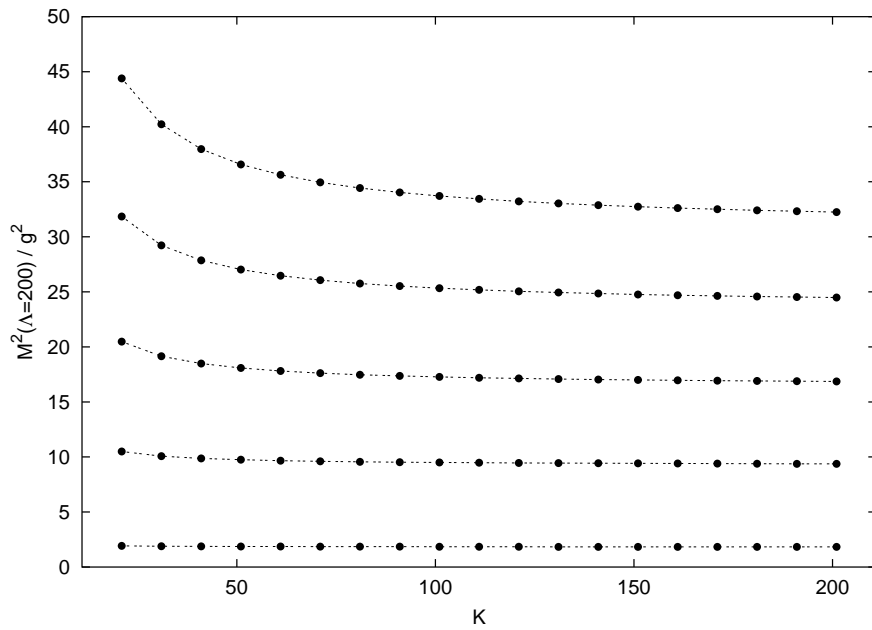


Abbildung 5.4: Die ersten fünf Massenquadrategieenwerte des Gluonspektrums für das doppelte Oszillatorpotential mit $\Lambda = 200$.

K	$M_{\Lambda=300}^2$				
21	1.451	7.914	15.414	23.932	33.309
51	1.414	7.357	13.632	20.357	27.531
81	1.400	7.217	13.179	19.417	25.943
111	1.392	7.153	12.972	18.986	25.208
141	1.386	7.116	12.854	18.738	24.786
171	1.381	7.091	12.777	18.578	24.511
201	1.378	7.073	12.722	18.465	24.318

Tabelle 5.4: Die Werte der ersten fünf Zustände zu Abbildung 5.5 für ausgewählte K -Werte

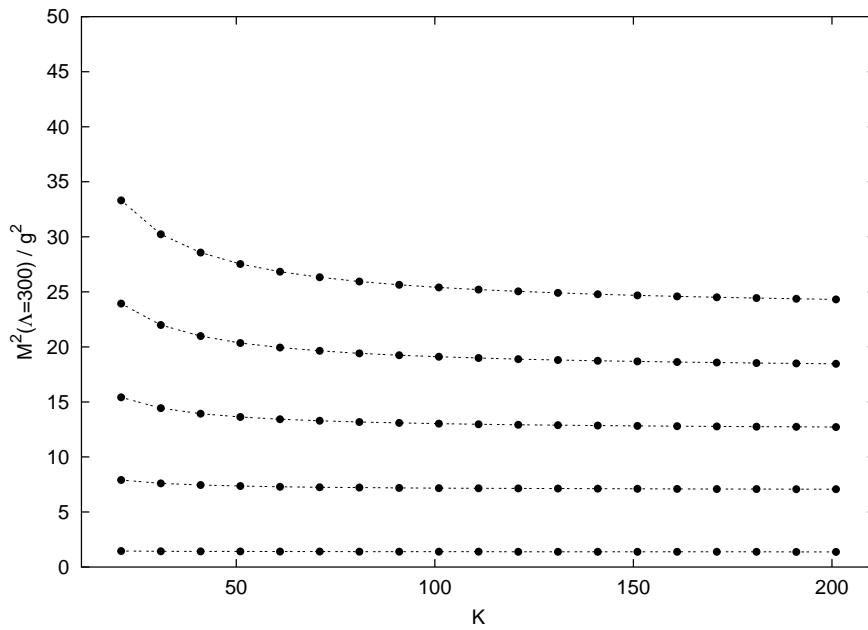


Abbildung 5.5: Die ersten fünf Massenquadratenwerte des Gluonspektrums für das doppelte Oszillatorpotential mit $\Lambda = 300$.

K	$M_{\Lambda=400}^2$				
21	1.198	6.528	12.715	19.743	27.480
51	1.167	6.065	11.239	16.785	22.702
81	1.155	5.950	10.864	16.007	21.387
111	1.149	5.897	10.693	15.650	20.780
141	1.144	5.866	10.595	15.445	20.430
171	1.140	5.845	10.531	15.312	20.203
201	1.137	5.830	10.486	15.219	20.043

Tabelle 5.5: Die Werte der ersten fünf Zustände zu Abbildung 5.6 für ausgewählte K -Werte

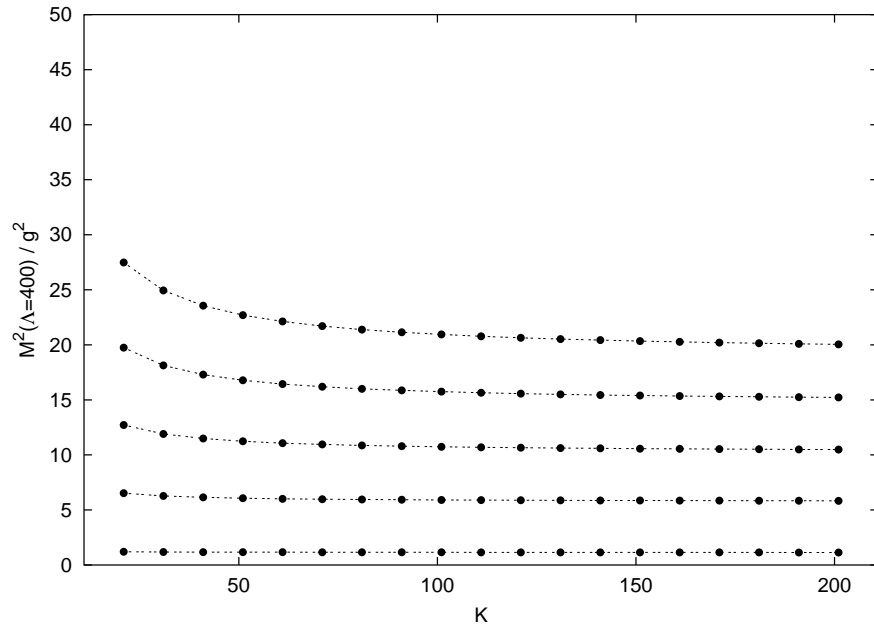


Abbildung 5.6: Die ersten fünf Massenquadrategieenwerte des Gluonspektrums für das doppelte Oszillatorpotential mit $\Lambda = 400$.

K	$M_{\Lambda=500}^2$				
21	1.032	5.619	10.940	16.984	23.636
51	1.005	5.220	9.672	14.443	19.532
81	0.995	5.121	9.349	13.774	18.402
111	0.989	5.075	9.202	13.467	17.880
141	0.985	5.048	9.117	13.290	17.579
171	0.982	5.031	9.062	13.176	17.384
201	0.979	5.018	9.027	13.097	17.250

Tabelle 5.6: Die Werte der ersten fünf Zustände zu Abbildung 5.7 für ausgewählte K -Werte

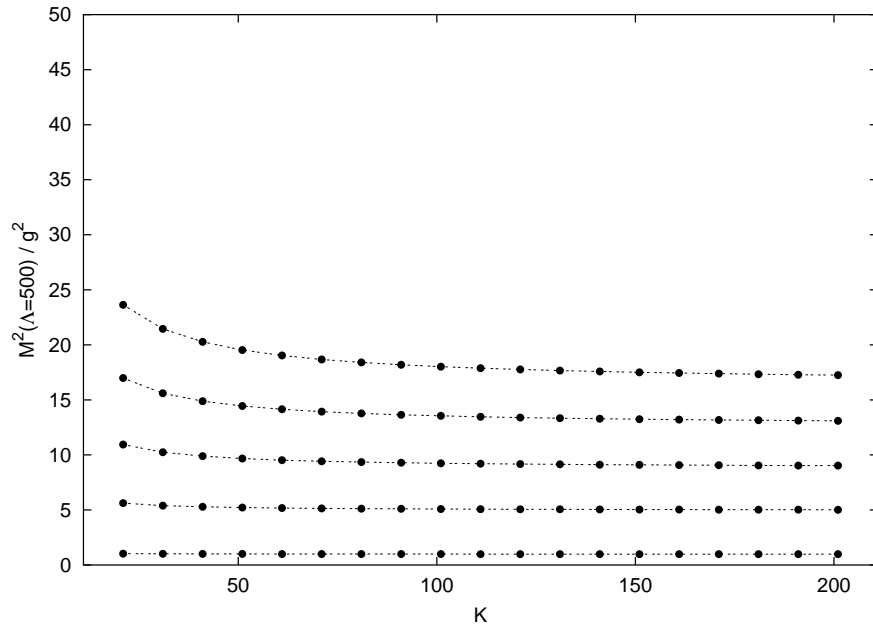


Abbildung 5.7: Die ersten fünf Massenquadrategieenwerte des Gluonspektrums für das doppelte Oszillatorpotential mit $\Lambda = 500$.

Durch den Einfluß der Zwangsnullmode a_0 zum Niedrigenergiebereich hin werden die Gluonenanregungen in eine doppelte Oszillatorpotentialstruktur gezwungen. Für a_0 gibt es dann zwei Lösungen [150], die miteinander verknüpft sind. Führt man den unitären Operator U_{z_2} ein, der mit der Z_2 -Symmetrie gemäß

$$U_{z_2} a_k U_{z_2}^\dagger = -a_k \quad , \quad k \neq 0 \quad (5.46)$$

assoziiert ist, und spaltet a_0 in einen geraden a_0^g und einen ungeraden a_0^u Anteil auf, so gilt

$$U_{z_2} a_0^g U_{z_2}^\dagger = a_0^g \quad , \quad U_{z_2} a_0^u U_{z_2}^\dagger = -a_0^u \quad . \quad (5.47)$$

Der gerade Anteil der Zwangsnullmode a_0^g bricht die Z_2 -Symmetrie der Theorie. In der gebrochenen Phase gibt es damit für $\tilde{g} > \tilde{g}_c$ zwei Lösungen der Zwangsgleichung [150]

$$a_0^u + a_0^g \Rightarrow \langle 0|a_0|0 \rangle > 0 \quad , \quad a_0^u - a_0^g \Rightarrow \langle 0|a_0|0 \rangle < 0 \quad . \quad (5.48)$$

Die zwei neuen Hamiltonoperatoren in der gebrochenen Phase haben dann die Form

$$H^+ = H(a_k, a_0^u + a_0^g) \quad , \quad H^- = H(a_k, a_0^u - a_0^g) \quad . \quad (5.49)$$

Da

$$H(a_k, a_0) = H(-a_k, -a_0) \quad (5.50)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} U_{z_2} H^- U_{z_2}^\dagger &= U_{z_2} H(a_k, a_0^u - a_0^g) U_{z_2}^\dagger = H(-a_k, -a_0^u - a_0^g) \\ &= H(a_k, a_0^u + a_0^g) = H^+ \quad . \end{aligned} \quad (5.51)$$

H^+ und H^- haben dieselben Eigenwerte. Jeder Hamiltonoperator erzeugt Zustände, die in einem Minimum der beiden Oszillatormulden lokalisiert sind. Es existieren Tunnelvorgänge zum jeweils anderen Minimum.

Die durch die Energie-Zeit-Unschärfe hervorgerufenen Quantenfluktuationen in a_0^g scheinen die Z_2 -Symmetrie der Theorie spontan für $\tilde{g} \rightarrow 1$ zu brechen. Ein Gluonzustand ist demnach eine Superposition aus den Zuständen der rechten und linken Oszillatormulde. Der Erwartungswert von ζ verschwindet: $\langle \zeta \rangle = 0$. Für die Fluktuationen gilt: $\langle (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 \rangle > 0$. Sie geben an, wie häufig ein Gluon von einer Mulde zur anderen tunnelt.

Die Massenquadrategieenwerte erfahren eine Reduktion. Die Energie des Grundzustandes wird zum Niedrigenergiebereich hin gesenkt.

Die Eichnullmode und Zwangsnulmode beeinflussen offensichtlich, wie in Abschnitt 2.2 auf semiklassischem Niveau beschrieben, instantonähnliche Tunnelvorgänge. Die Tunnelvorgänge sollten bei Berücksichtigung der Stromquarks von Spinumklappprozessen, wie in Abschnitt 2.3 erwähnt, begleitet sein; denn die Stromquarks könnten an den Quantenfluktuationen, den Tunnelvorgängen des gluonischen Vakuums streuen und dabei ihre Chiralität umkehren.

Man kann daher weiter annehmen, daß die Zwangsnulmode eine Kopplung zwischen den links- und rechtshändigen Zuständen des betrachteten Stromquarks initiieren und eine effektive Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen erzeugen kann. Der $(1+1)$ -dimensionale Sektor des kollinearen Modells könnte dabei unabhängig von der Anzahl der Dimensionen, in denen die Theorie anfangs formuliert wurde, die wesentliche Struktur der Wechselwirkung liefern (siehe dazu auch [154]). Dies wird zur Zeit noch genauer untersucht.

Die Tunnelenergie kann aus den Spektren der Massenquadrategieenwerte für $K, \Lambda \rightarrow \infty$ berechnet werden. Sie ist ein Maß für die Depolarisation der Gluonmaterie zum Niedrigenergiebereich hin und möglicherweise für die „Verwandlung“ eines einzelnen Stromquarks in ein Konstituentenquark verantwortlich. Spin, Energie und Masse des Protons stehen offensichtlich in Relation zueinander.

In der Zwei-Teilchennäherung können Extrapolationskurven des Niedrigenergiebereichs für M_Λ bei $K \rightarrow \infty$ angegeben werden (siehe die Abbildungen 5.10–5.14 auf den Seiten 83, 84 und 85). Der höchste berücksichtigte K -Wert ist aufgrund der gut konvergierenden Numerik 201. Es ergibt sich

$$\frac{M_\Lambda(K)}{\hat{g}} = b_0 + \frac{b_1}{(\ln K)} - \frac{b_2}{(\ln K)^2} \quad . \quad (5.52)$$

Die Koeffizienten b_0, b_1 und b_2 sind zu berechneten Λ -Werten in Tabelle 5.7 aufgelistet. Aus der Extrapolationsgleichung

$$\frac{M_\Lambda}{\hat{g}} = 0.1273 + 0.8951 \cdot \Lambda^{-0.3851} \quad (5.53)$$

kann nun für alle M -Eigenwerte im Limes $K \rightarrow \infty$ der Masseneigenwert M_∞ des Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ ermittelt werden. Es ergibt sich ein Wert von $M_\infty/\hat{g} = 0.13$. Die empirische Standardabweichung für den obigen Fit beträgt $\sigma = 0.9671 \cdot 10^{-7}$. Der Massenquadrategieenwert wird im Kontinuumlimes $\Lambda \rightarrow \infty$ sehr klein.

Es kann gezeigt werden, daß M^2 mit dem polarisierten Gluonanteil in der Axialladung verknüpft werden kann. Denn der Spin- bzw. Helizitätsoperator S_3^{GI} kann über den Pauli-Lubanski-Vektor w_ρ und den Lichtkegelimpuls P^+ bzw. über die zwei Casimir-Operatoren aus den Gleichung (3.8) und (3.10) (siehe auch [50, 126]) folgendermaßen geschrieben wer-

Λ	b_0	b_1	b_2
140	1.4609	0.4231	0.2656
160	1.3946	0.3891	0.2424
180	1.3392	0.3677	0.2269
200	1.2926	0.3490	0.2200
220	1.2487	0.3478	0.2176
240	1.2114	0.3390	0.2104
260	1.1785	0.3305	0.2034
280	1.1492	0.3222	0.1967
300	1.1207	0.3188	0.1944
320	1.0991	0.3064	0.1840
340	1.0753	0.3032	0.1820
380	1.0332	0.2970	0.1782
400	1.0186	0.2859	0.1688
420	1.0010	0.2831	0.1672
440	0.9847	0.2805	0.1656
460	0.9693	0.2778	0.1641
480	0.9587	0.2677	0.1556
500	0.9479	0.2440	0.1147
600	0.8903	0.2477	0.1416
700	0.8441	0.2389	0.1367

Tabelle 5.7: Approximationskoeffizienten verschiedener Λ -cutoffs

den

$$S_3^{Gl} = \frac{w_+}{P^+} = \frac{P^-}{P^+} M^{12} = \frac{P^- P^+}{(P^+)^2} M^{12} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{(P^+)^2} M^{12} \quad . \quad (5.54)$$

M^{12} ist die longitudinale Rotation um die x^3 -Achse. Der kanonische Spin und die Helizität in der *front form* sind über die Melosh-Rotation miteinander verbunden [127].

Für den Gluonanteil der axialen Singulettladung ergibt sich nach Gleichung (1.29)

$$a_{Gl}^0(\tilde{g})s_\mu = \langle p, s | J_{5\mu}^{0\,Gl} | p, s \rangle = 2S_3^{Gl} = M^2 \frac{M^{12}}{(P^+)^2} \quad . \quad (5.55)$$

$a_{Gl}^0(\tilde{g})s_\mu$ ist die Gluonspinpolarisation des Protons. Der axiale Vektor $J_{5\mu}^{0\,Gl}$ ist nach Gleichung (2.26) mit dem Vierervektor

$$K_\mu \equiv 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp} (G_\nu \partial_\rho G_\sigma - \frac{2}{3} ig G_\nu G_\rho G_\sigma) \quad (5.56)$$

verknüpft. Es gilt

$$\partial^\mu J_{5\mu}^{0\,Gl} = -\frac{3g^2}{8\pi^2} \partial^\mu K_\mu = -\frac{3g^2}{8\pi^2} \text{Sp}(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}) \quad . \quad (5.57)$$

Berücksichtigt man in der Divergenz des totalen axialen Singulettstroms die Quarkbeiträge, so ist nach (1.60)

$$\partial^\mu J_{5\mu}^0 = 2im_q \bar{q} \gamma_5 q - \frac{3g^2}{8\pi^2} \text{Sp}(G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}) \quad . \quad (5.58)$$

m_q sind die Quarkmassen der leichten Flavours u oder d und des strange Flavour s . Führt man den erhaltenen Strom $\hat{J}_{5\mu}^0$ ein, d.h.

$$\partial^\mu \hat{J}_{5\mu}^0 = \partial^\mu J_{5\mu}^0 + \frac{3g^2}{8\pi^2} \partial^\mu K_\mu = 0 \quad , \quad (5.59)$$

so erhält man

$$J_{5\mu}^0 = \hat{J}_{5\mu}^0 - \frac{3g^2}{8\pi^2} K_\mu \quad (5.60)$$

und

$$|a_{Gl}^0(\tilde{g})| s_\mu = \langle p, s | \frac{3g^2}{8\pi^2} K_\mu | p, s \rangle = M^2 \frac{M^{12}}{(P^+)^2} \quad . \quad (5.61)$$

Der Eichnullmodeneffekt auf das Gluonspektrum steht damit im Zusammenhang mit dem Instanton-sensitiven Mechanismus aus Kapitel 2, da für K_μ

$$6N_w = - \int d^4x \partial^\mu K_\mu \quad (5.62)$$

gilt, mit x als vierdimensionalen Vektor im Minkowskiraum und nach (2.15)

$$N_w = -\frac{1}{24\pi^2} \int dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(U^{-1} \partial_\nu U)(U^{-1} \partial_\rho U)(U^{-1} \partial_\sigma U) \quad .$$

Im Hochenergiebereich $\tilde{g} \rightarrow 0$ ist der polarisierte Gluonanteil in K_μ aufgrund des fehlenden Zwangsnullmodeneffekts und des dominierenden Eichnullmodeneffekts maximal. Die gesamte axiale Singulettladung nimmt einen kleinst möglichen Wert an, da der polarisierte Gluonanteil mit negativem Vorzeichen in die Axialstromgleichung (5.60) eingeht. Vice versa verhält es sich für den Niedrigenergiebereich. Der polarisierte Gluonanteil wird aufgrund der eingeschalteten Zwangsnullmode minimal. Die axiale Singulettladung wird im wesentlichen von den Quarks getragen.

Im Kontinuumslimites $\Lambda \rightarrow \infty$ ergibt sich der Massenquadratenwert des Niedrigenergiebereichs bezogen auf die Kopplung zu $M^2/\hat{g}^2 = 0.02$ (siehe Gl. (5.53)). Der erste Massenquadratenwerte des Niedrigenergiebereichs wird demnach hinsichtlich des Wertes

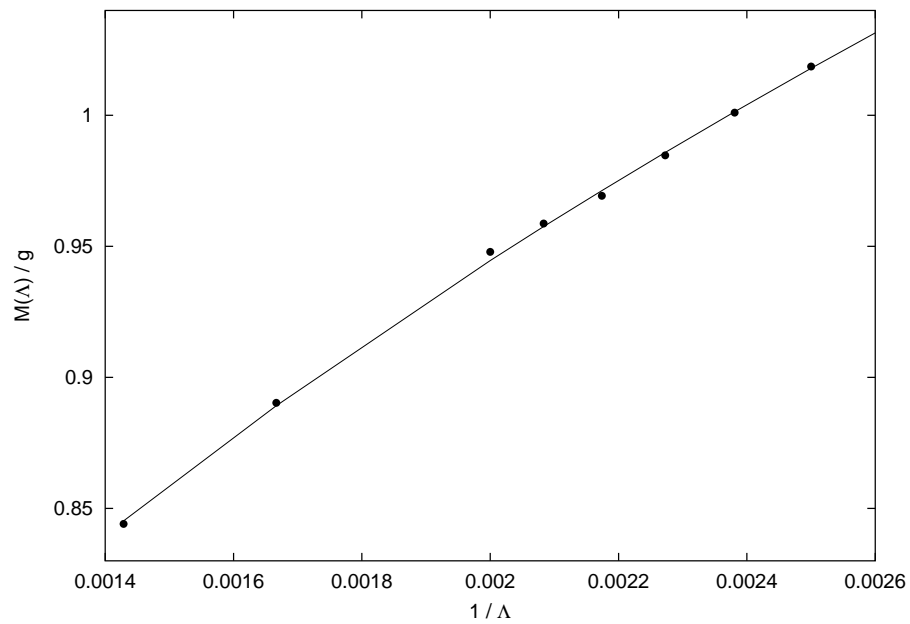
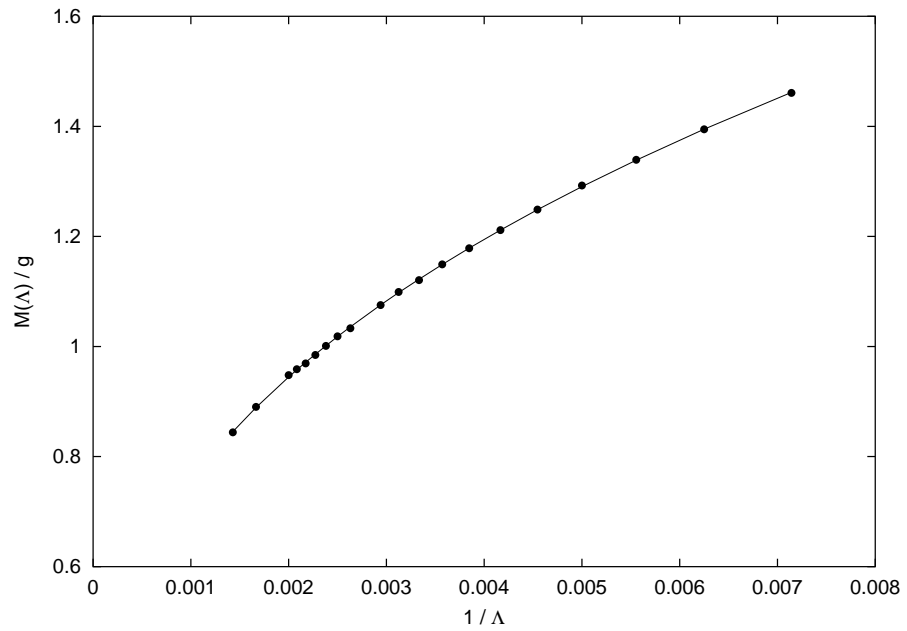


Abbildung 5.8: *Extrapolationskurve des Grundzustandes im Kontinuumlimes des Niedrigenergiebereichs*

$M_{Kasten}^2/\hat{g}^2 = 60.10$ des Hochenergiebereichs (siehe Gl. (5.45)) um 99.97%, d.h. so gut wie fast vollständig auf Null reduziert. Der anomale Beitrag zur polarisierten Strukturfunktion g_1 verschwindet also annähernd im Niedrigenergiebereich. Im Hochenergiebereich ist dagegen der polarisierte Gluonbeitrag wichtig für die innere Substruktur des Protons.

Ob die Gluonpolarisation des Niedrigenergiebereichs exakt Null wird oder ob eine verschwindend kleine Gluonrestpolarisation übrig bleibt, kann allerdings erst mit Berücksichtigung der fermionischen Freiheitsgrade in der Lagrangedichte aus (4.2) abschließend festgestellt werden. Dies wird noch untersucht.

Geht man davon aus, daß im Niedrigenergiebereich der Gesamtspin im wesentlichen von den Quarks getragen wird, d.h. $a_{GI}^0(\tilde{g}) \approx 0$ und $a^0(\tilde{g}) \approx 1$, so ergibt sich für die axiale Singulettladung im Hochenergiebereich eine Minimierung des Wertes auf

$$a^0(\tilde{g}) = 3.0 \cdot 10^{-4} \approx 0 \quad . \quad (5.63)$$

Der Wert $a^0(\tilde{g})$ im Kontinuumlimes hängt nicht von dem Parameter Λ ab. Das offene Renormierungsproblem auf dem Lichtkegel kann hinsichtlich der Frage der Gluonpolarisation über die Regularisierung für $\Lambda \rightarrow \infty$ umgangen werden.

Das *colour-flux-tube*-Gluonmodell hat zwei qualitativ verschiedene Grundzustände für $\tilde{g} \rightarrow 0$ und $\tilde{g} \rightarrow 1$. Es muß demnach ein Quantenphasenübergang bei einem kritischen Wert \tilde{g}_c nahe $\tilde{g} \rightarrow 1$ erfolgen.

Die kritische Kopplung \tilde{g}_c könnte mit einem hohen numerischen Aufwand bestimmt werden. Dafür müßte von einem an den Ecken abgerundeten Kastenpotential mit langsam anwachsendem *peak* in der Mitte des *fundamental modular domain* ausgegangen werden, das über eine punktweise Darstellung numerisch behandelt werden müßte. Für die Aussage über die Spinverteilung im Proton ist aber in erster Linie der Limes des Hoch- bzw. Niedrigenergiebereichs entscheidend, für den das Kastenpotential bzw. das doppelte Oszillatorpotential als analytisch lösbare Approximationen gut geeignet ist.

Nach dem Vorstehenden ergibt sich das folgende phänomenologische Bild: Für $\tilde{g} \rightarrow 0$ verhalten sich die Gluonen nahezu wie ein System wechselwirkungsfreier „Quasiteilchen“ mit einer effektiven Masse und einem ausgerichtetem Spin. Bei der Kopplung $\tilde{g} \rightarrow 1$ bilden die Gluonen stringähnliche Singulettzustände mit Spin 0 als energetisch niedrigste Form. Die Zwangsnullmode a_0 hat die Funktion einer Stringkonstanten.

Das Bild ist in Einklang mit der Quark-Gluon-Phase und der Meson-Baryon-Phase der QCD.

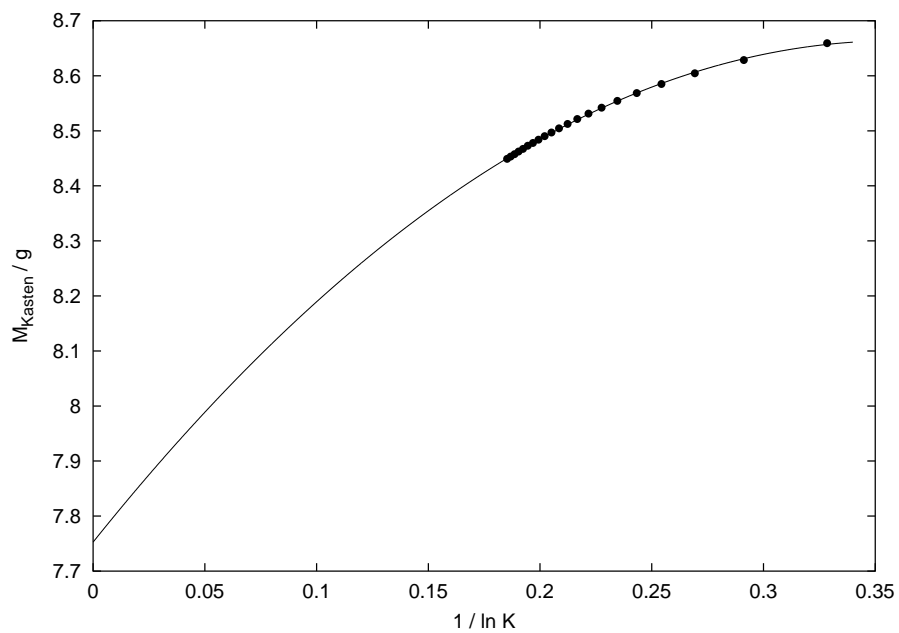


Abbildung 5.9: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Hochenergiebereich*

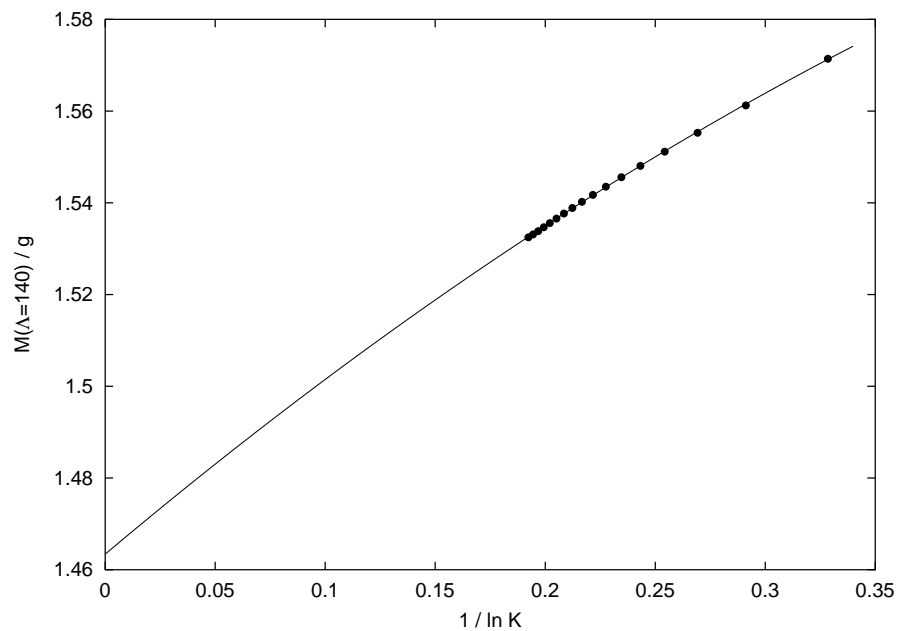


Abbildung 5.10: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Niederenergiebereich bei $\Lambda = 140$*

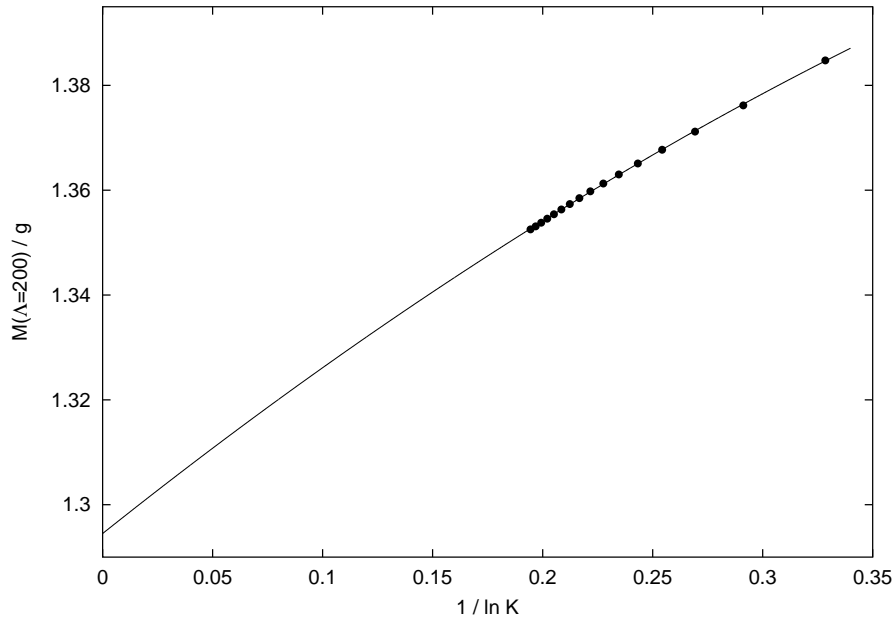


Abbildung 5.11: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Niederenergiebereich bei $\Lambda = 200$*

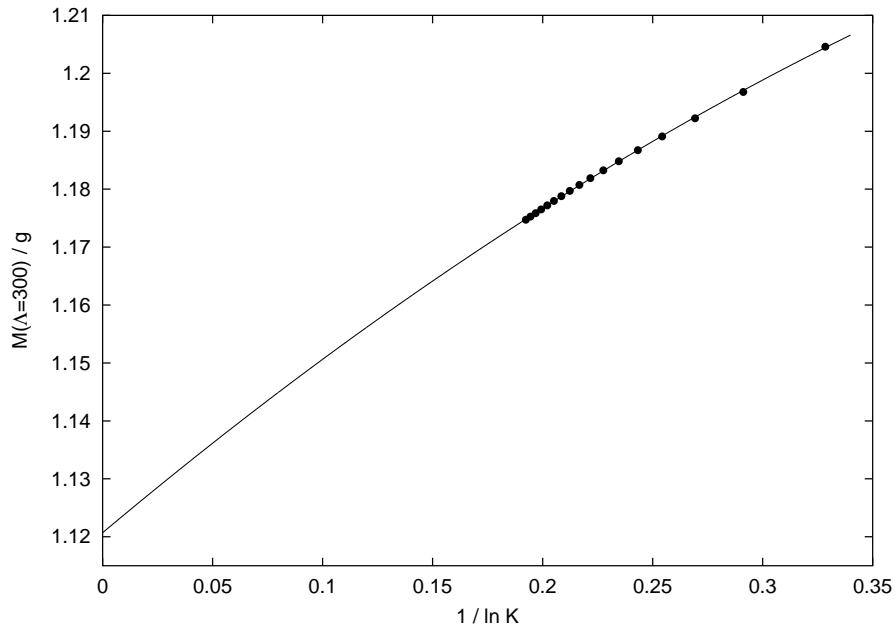


Abbildung 5.12: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Niederenergiebereich bei $\Lambda = 300$*

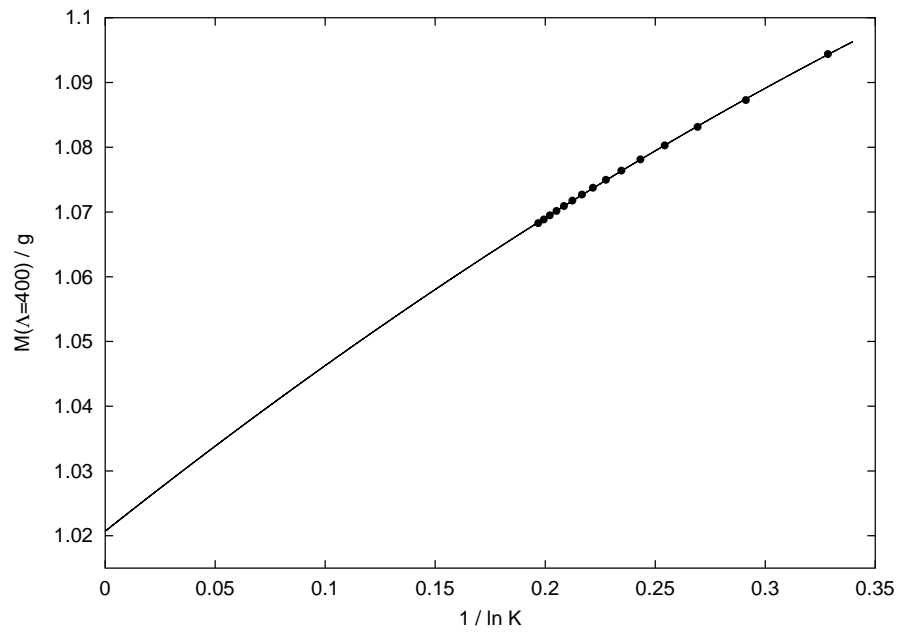


Abbildung 5.13: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Niedrigenergiebereich bei $\Lambda = 400$*

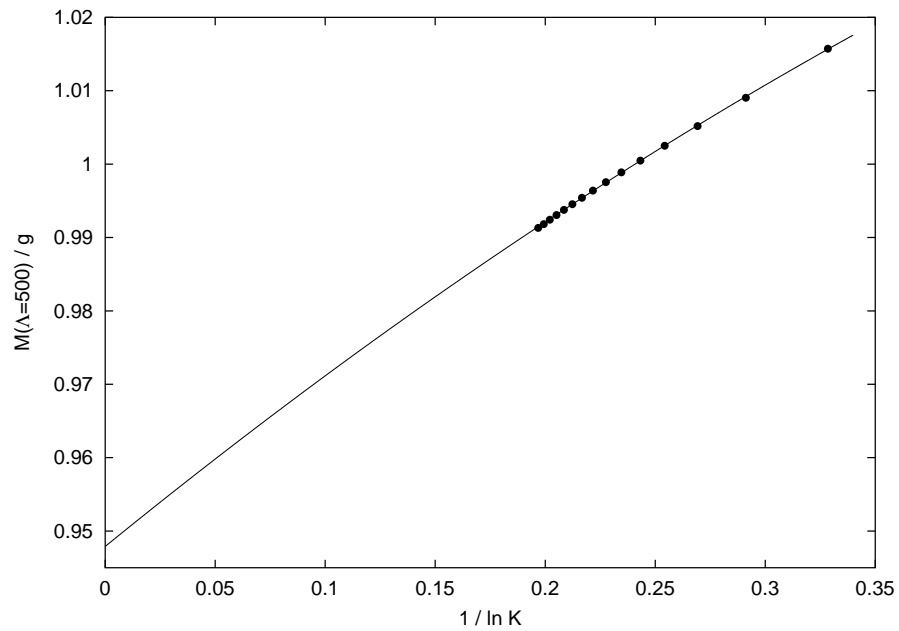


Abbildung 5.14: *Extrapolationskurve des ersten Eigenwertes im Niedrigenergiebereich bei $\Lambda = 500$*

Resumé

In dieser Arbeit ist der Polarisierungseffekt der Gluonmaterie aus den $SU_c(2)$ -Farb-Maxwell-Gleichungen erstmals hergeleitet und berechnet worden, um das Protonspinverteilungsproblem und die Polarisation der starken Wechselwirkung im Hamiltonschen Formalismus der Diskretisierten Lichtkegelquantisierung (DLCQ) zu analysieren. Der Effekt läßt sich mit Hilfe der Nullimpulsmoden der Vakuumstruktur der $SU_c(2)$ auf dem Lichtkegel in der Coulomb-Eichung darstellen.

Für die Untersuchung ist das sogenannte *colour flux tube model* nach Dalley und Klebanov in $2 + 1$ Dimensionen in der DLCQ herangezogen ([122]-[124]) und Schwergewicht auf die Gluonpolarisation und ihren nichtstörungstheoretischen Ursprung gelegt worden. In Einklang mit experimentellen Hinweisen auf Flußröhren in Baryonen und Mesonen aus Streuexperimenten [129] ist gezeigt worden, daß die *colour flux tube* ähnliche $SU(2)$ -Gluon-Wechselwirkung in $2 + 1$ Dimensionen eine wesentliche Rolle für die physikalische Welt in $3 + 1$ Dimensionen spielt. Eine signifikante Polarisation der Seequarks sowie der Beitrag eines orbitalen Drehimpulses sind dabei außer acht gelassen.

Das physikalische Bild des Quark-Parton-Modells, in welchem in erster Näherung das vom Elektron abgestrahlte virtuelle Photon an einen punktähnlichen Konstituenten, d.h. an ein Quark oder Antiquark, innerhalb des Protons koppelt, ist aufgegeben worden. Es ist gezeigt worden, daß der nicht erhaltene Singulettstrom als Charakteristikum für die Spinverteilung im Proton nicht über eine punktähnliche Konstituentendynamik in Abhängigkeit des Spins erklärt werden kann, sondern auf einem Vakuumeffekt beruht. Die Skalenabhängigkeit der QCD im Axialvektorkanal ist mit der Topologie des reinen $SU_c(2)$ -Yang-Mills-Vakuums verknüpft worden.

Die Beschränkung auf die $SU_c(2)$ -Gruppe des Gluonmodells ist mit Hilfe des Theorems von Bott [96] und des semiklassischen wirkungsorientierten Zugangs zur QCD nach 't Hooft [39] zu rechtfertigen. Nach dem Theorem von Bott wird die $SU_c(3)$ -Topologie im wesentlichen von der $SU_c(2)$ -Topologie bestimmt. Im semiklassischen Zugang nach 't Hooft induzieren Instantonen einerseits als Pseudoteilchen in der vierdimensionalen Raumzeit einen *charm*-Anteil, der die störungstheoretischen Vorhersagen in polarisierten Streuexperimenten verändert, andererseits führen sie als Tunnelprozesse in der imaginären

Zeit zur Spinumverteilung im Proton. Die strukturelle Ähnlichkeit der Symmetrie–Algebra der Instantonen in zwei Dimensionen und jener in den vierdimensionalen selbst–dualen Yang–Mills–Gleichungen ist bereits von Polyakov gezeigt worden [116].

Die Tunnelrate kann allerdings schwer über die Korrelationsfunktionen in der imaginären Welt bestimmt werden, da die Kopplung der QCD selbst eine Funktion der Längenskala ist [155]. Der *colour flux tube* ist daher über die reine Gluontheorie mit adjungierter Materie von bosonischer Natur unter Erhaltung der Helizitäts– bzw. Spinfreiheitsgrade auf Quantenniveau im Hamiltonschen Zugang der DLCQ formuliert worden.

Die dynamische Eichnullmode des longitudinalen Gluonfeldes und die Zwangsnullmode des transversalen Gluonfeldes liefern eine komplexe Vakuumstruktur, die mit der nicht–abelschen Gruppentopologie über die Spin–Masse–Relation

$$|a_{GI}^0(\tilde{g}(Q^2, x))| \propto M^2 \quad (5.64)$$

verknüpft ist. Die Nullmoden wirken auf das Gluonmassenspektrum und damit auf die axiale Singulettkomponente der polarisierten Strukturfunktion des Protons. Die QCD wird über die Struktur des Vakuums in Abhängigkeit von der Kopplung (Energie) bestimmt. Im Formalismus der DLCQ kann die spezifische Struktur mit Hilfe der Eich– und Zwangsnullmode beschrieben werden. Diese wirkt sich auch auf die Massenskala Λ_{QCD} und die OZI–Regel [89, 90] aus.

Im Hochenergiebereich $\tilde{g} \rightarrow 0$, d.h. bei kleinen Werten von x , bedingt die Eichnullmode, daß der Gesamtspin des Protons im wesentlichen von den Gluonen getragen wird, die axiale Singulettladung erfährt eine Reduktion auf den Wert von $a^0(\tilde{g}) \approx 0$: die OZI–Regel ist verletzt und der größte Anteil des Protonspins wird von den Gluonen übernommen.

Im Niedrigenergiebereich dominiert die Zwangsnullmodeeigenschaft. Der Einfluß der Zwangsnullmode führt dazu, daß die Potentialstruktur des Eich–Zwang–Sektors eine approximative, analytisch behandelbare doppelte Oszillatorstruktur annimmt. Die Zwangsnullmode induziert eine neue Wechselwirkung, die darin resultiert, daß die OZI–Regel gültig ist, d.h. daß der Hadronspinanteil im wesentlichen von den Quarks getragen wird $a^0(\tilde{g}) \approx 1$.

Neben der Regularisierungsprozedur ist das Renormierungsproblem auf dem Lichtkegel, in dessen scharfen Rand bereits Heisenberg einen starken Hinweis auf die Ursache der Renormierungsprobleme in einer relativistischen Quantenfeldtheorie gesehen hat [156], ein wesentliches Forschungsanliegen für das vollständige Verständnis der QCD.

In diesem Zusammenhang wäre eine Analyse der Anteile der Zwangsnullmodenlösung über den iterativen Ansatz hinaus von Interesse. Möglicherweise könnte der $(\Lambda \rightarrow \infty)$ –Anteil im Zwangspotential mit der halbzahligen topologischen Ladung eines Merons der euklidischen Eichtheorie in Analogie gesetzt werden, die an einem Punkt konzentriert

ist, an dem die Lösung singulär ist, und die einer neuen Art von Tunnelprozessen im Minkowski-Raum entspricht. Entscheidend dabei ist die physikalische Interpretation der Meron-Lösungen als farb-magnetische Monopole mit endlicher Lebensdauer, die spontan im Yang-Mills-Vakuum erscheinen können [36]. Nach Mandelstam führt ein Vakuum mit farbigen Monopolen zu einer supraleitenden Gluonröhren-Struktur und zum *Confinement* der Quarks [157]. Dies steht in Einklang mit den Argumenten zur gluonischen Vakuumstruktur in der DLCQ aus Kapitel 5.

Die Struktur der Zwangsnullmodenlösung könnte sowohl die nicht selbst-dualen Meron-Lösungen als auch die selbst-dualen Instanton-Lösungen oder allgemeiner die Kraan-van Baal-Lösungen der klassischen $SU(N)$ -Yang-Mills-Gleichungen bei kompaktifizierter Zeit, d.h. topologische Anregungen des QCD-Vakuums von komplexer Substruktur, enthalten, die kürzlich von Gattringer in dedizierten $SU(3)$ -Gittereichrechnungen gefunden wurden [38].

Möglicherweise könnte zudem der meronisch-farb-monopolische Anteil der Zwangsnullmode zum Niedrigenergiebereich von so entscheidendem Einfluß sein, daß das *Confinement* in der DLCQ erklärt werden könnte. Dies wird zur Zeit noch untersucht [150].

Die Frage, wie man die $(1 + 1)$ -dimensionalen Röhren unter Beibehaltung der Nullimpulsmodenstruktur so aneinander koppeln kann, daß man eine volle $(3 + 1)$ -dimensionale Theorie erhält, und die Integration der fermionischen Freiheitsgrade in die Gluontheorie der DLCQ sind dabei von entscheidender Bedeutung.

Anhang A

Nichtstörungstheoretische Aspekte des Vakuums

A.1 Wigner–Weyl– und Nambu–Goldstone–Modus

Die Unterschiede zwischen den in Kapitel 1 in Gleichung (1.42) definierten Ladungen

$$Q^a = Q_L^a + Q_R^a \quad , \quad Q_5^a = Q_L^a - Q_R^a \quad , \quad (\text{A.1})$$

liegen im Vakuum. $Q_{L,R}$ sind die Ladungen mit definierter Parität. Experimentell wie theoretisch zeigt es sich, daß die $SU(3)_{L+R}$ -Flavoursymmetrie und die chirale Symmetrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$ auf verschiedene Weise verwirklicht sind.

Geht man von einem Erzeugersatz E^j der Symmetrietransformationen der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} - \mathcal{L}_{cbl}$ (siehe (1.34)) aus, so gibt es zwei Möglichkeiten die Erzeuger in bezug auf das Vakuum zu definieren, nämlich

$$E^j |0\rangle = 0 \quad , \quad E^j |0\rangle \neq 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die Symmetrie, die die Lagrangedichte zeigt, kann auch für den Vakuumzustand der Theorie gelten, dies ist allerdings nicht zwingend notwendig. Im ersten Fall spricht man von der ungebrochenen Phase oder dem Wigner–Weyl–Modus, im zweiten Fall von der spontan gebrochenen Phase oder dem Nambu–Goldstone–Modus. Im allgemeinen Fall liegt eine Mischung beider Phasen vor, d.h. einige Erzeuger E^i , mit $i = 1, \dots, r$, erfüllen die erste Bedingung aus (A.2) und die übrigen Erzeuger E^k , mit $k = r + 1, \dots, n$, die zweite Bedingung aus (A.2). Da der Teilsatz der Wigner–Weyl–Erzeuger E^i das Vakuum annihiliert, annihiliert der Kommutator aus Wigner–Weyl–Erzeugern ebenfalls das Vakuum. Die Wigner–Weyl–Symmetrien bilden damit eine Untergruppe.

Nimmt man an, die chirale Symmetrie sei im Wigner–Weyl–Modus realisiert ist, so ist die

Invarianz des Vakuums gleich der Invarianz der Lagrangedichte und

$$Q^a | 0 \rangle = 0 \quad , \quad Q_5^a | 0 \rangle = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Die physikalischen Zustände sind dann invariant unter den Transformationen einer Wigner–Weyl–Gruppensymmetrie. Der Satz Q^a bildet die Gruppe $SU(3)_{L+R}$ und der Satz Q_5^a die Gruppe $SU(3)_{L-R}$. In diesem Fall sind alle Mesonen in einem Flavour–Multiplett bis auf Korrekturen der Ordnung m_q^2/M_h^2 entartet (M_h ist die mittlere Hadronmasse). Für die Vektormesonen ω, ρ, K^* und ϕ ist dies z.B. in guter Näherung erfüllt, d.h. $Q^a|0\rangle = 0$. Unter Berücksichtigung von (hypothetischen) Paritäts–Dubletts ist die Entartung allerdings nicht mehr gegeben. Die axialen Vektormesonmassen liegen um einen Faktor 5/3 höher als die Massen von ω und ρ . Zudem gibt es kein Teilchen mit der Spin–Parität $\frac{1}{2}^-$, das näherungsweise zur Masse des Protons ($\frac{1}{2}^+$) entartet ist.

Man nimmt daher an, daß die $SU(3)_{L+R}$ –Flavoursymmetrie eine Wigner–Weyl–Symmetrie ist, die chirale Symmetrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$ aber Erzeuger vom Nambu–Goldstone–Typ enthält:

$$Q^a | 0 \rangle = 0 \quad , \quad Q_5^a | 0 \rangle \neq 0 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Für jeden Erzeuger, der das Vakuum nicht annihiliert, gibt es nach dem Goldstone–Theorem ein masseloses Boson mit den Quantenzahlen des Erzeugers. Das pseudoskalare Mesonoktett $(\pi^{0,\pm}, K^{0,\pm}, \bar{K}^0, \eta)$ könnte die Kandidaten liefern, wenn man die Brechung als dynamisch annimmt. Die Goldstone–Teilchen sind zusammengesetzte Zustände fundamentaler Quarks und die QCD–Lagrangedichte erzeugt Kondensate mit nicht verschwindenden Vakuumerwartungswerten $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \neq 0$.

Das Kondensations–Phänomen wird zudem von der Konsistenzbedingung von ’t Hooft unterstützt. In diesem Sinne ist die QCD inkonsistent ohne die obige Symmetriebrechung. Ein Argument ist, daß man die *strange* Quarkmasse gegen Unendlich gehen läßt. Die Hadronmassen, die *strange* Quarks enthalten, haben dann eine unendliche Masse. Einige dieser Zustände sind aber aufgrund der verbleibenden $SU(2)_L \times SU(2)_R$ –Symmetrie masselos. Beide Folgerungen sind nur dann nicht im Widerspruch zueinander, wenn die chirale Symmetrie gebrochen ist [62].

A.2 Euklidische SU(2)–Lösung

A.2.1 Das BPST–Instanton

Die von Belavin, Polyakov, Schwarts und Tyupkin für die Windungszahl $N_w = 1$ angegebene Lösung (BPST–Instanton) wird wie folgt konstruiert [99]:

$$G_{\mu_E}^a = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} \frac{i}{g} U^{-1}(x_E) \partial_{\mu_E} U(x_E) = -\frac{2}{g(r^2 + \lambda^2)} \eta_{\nu\mu}^a x_\nu \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$G_{\mu\nu_E}^a = -\frac{4\lambda^2 \eta_{\mu\nu}^a}{g(r^2 + \lambda^2)^2} = \tilde{G}_{\mu\nu_E}^a \quad . \quad (\text{A.6})$$

Dabei ist

$$f(r^2) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2} \quad , \quad r^2 = x_4^2 + \vec{x}^2 \quad , \quad (\text{A.7})$$

die einfachste Funktion, welche die Randbedingungen aus (2.8) erfüllt und keine Singularität am Ursprung $r \rightarrow 0$ hat, da

$$f(r^2) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad , \quad f(r^2) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{const. } r^2 \quad . \quad (\text{A.8})$$

λ ist ein beliebiger Skalenparameter, der als Instanton–Ausdehnung interpretiert wird. Als Abbildung wurde die $S^3 \rightarrow SU(2)$ zur Windungszahl $N_w = 1$, mit

$$U(x_E) = \frac{1}{r} (\sigma_4 x_4 + i \vec{\sigma} \vec{x}) \quad , \quad \sigma_4 = \mathbf{1} \quad , \quad \vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \quad , \quad (\text{A.9})$$

verwendet, wobei σ^i die Pauli–Matrizen sind. Der Tensor

$$\eta_{\mu\nu}^a = \begin{cases} \epsilon_{\mu\nu 4}^a + \delta_{\mu 4} \delta_\nu^a - \delta_{\nu 4} \delta_\mu^a & , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \\ 0 & , \quad a = 4, \dots, 8 \quad , \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.11})$$

beschreibt die Kopplung zwischen Raumzeit– und Farbindices nach 't Hooft [94]. Die neben den selbstdualen Lösungen aus (A.5) existierenden anti-selbstdualen Lösungen erhält man durch die Ersetzung

$$\bar{\eta}_{\mu\nu}^a = \eta_{\mu\nu}^a \quad , \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 \quad , \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^a = -\eta_{\mu\nu}^a \quad , \quad \mu, \nu = 4 \quad . \quad (\text{A.12})$$

Multi–Instantonlösungen $G_{\mu_E}^{(N_w)}$ zu einer beliebigen Windungszahl sind N_w –Potenzen von (A.9) (siehe [158]–[161]).

A.2.2 Die Wirkung des doppelten Oszillatorpotentials

Das Eichpotential aus Gleichung (A.5) kann für die Windungszahl $N_w = 1$ geschrieben werden als

$$G_{\mu E}^a = -\frac{1}{g} \frac{1 + \Phi(r^2)}{r^2} \eta_{\nu\mu}^a x_\nu \quad , \quad \Phi(r^2) = \frac{r^2 - \lambda^2}{r^2 + \lambda^2} \quad . \quad (\text{A.13})$$

Mit der Substitution $\tau = \ln \frac{r^2}{\lambda^2}$ ergibt sich

$$\Phi(\tau) = \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad . \quad (\text{A.14})$$

Eingesetzt in die Yang–Mills–Wirkung aus (2.16) und unter Berücksichtigung des η -Symbols folgt die Wirkung eines doppelten Oszillatorpotentials

$$S_E = \frac{8\pi^2}{g^2} \frac{3}{2} \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{8} (\Phi^2 - 1)^2 \right] \quad . \quad (\text{A.15})$$

Die Minima des Potentials liegen bei $\Phi = \pm 1$. τ kann als Zeitparameter interpretiert werden. Die Trajektorie, die von -1 bei $\tau = -\infty$ nach $+1$ bei $\tau = +\infty$ tunnelt, ist durch (A.14) gegeben.

Anhang B

Ströme und Ladungen

B.1 Definitionen der Ladungen

Nach Gleichung (4.20) ist die Gluonenladung \mathcal{Q}_G als das Integral über die Lichtkegelzeitkomponente des Gluonenstroms \mathcal{J}_G definiert. Setzt man die einzelnen Feldkomponenten, von denen \mathcal{J}_G abhängt, ein, so gilt für die Ladungen

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_G &= \mathcal{Q}_M + 2iL [\partial_+ V, V] + 2g L [[V, A], V] \\ &= \mathcal{Q}_M - 2g L v^2 \overset{\circ}{A}_+ \tau^+ - 2g L v^2 \overset{\circ}{A}_- \tau^- ,\end{aligned}\tag{B.1}$$

mit V und A aus (4.7) sowie v und $\overset{\circ}{A}_\pm$ als entsprechende Helizitätskomponenten zu V und zur Nullmode von A (siehe auch (4.9)). \mathcal{Q}_M ist die dem Massenstrom J_M^+ zugeordnete Ladung. In Komponentenschreibweise erhält man

$$\mathcal{Q}_3 = Q_3 \quad , \quad \mathcal{Q}_+ = Q_+ - 2g L v^2 \overset{\circ}{A}_+ \quad , \quad \mathcal{Q}_- = Q_- - 2g L v^2 \overset{\circ}{A}_- \quad .\tag{B.2}$$

B.2 Explizite Ausdrücke

Für die Ströme ergibt sich gemäß Gleichung (4.17)

$$J_3^+(x^-) = \frac{1}{i} (\varphi_+ \pi_- - \varphi_- \pi_+)_s \quad ,\tag{B.3}$$

$$J_+^+(x^-) = \frac{1}{i} (\varphi_3 \pi_+ - \varphi_+ \pi_3)_s \quad , \quad J_-^+(x^-) = -\frac{1}{i} (\varphi_3 \pi_- - \varphi_- \pi_3)_s \quad ,\tag{B.4}$$

d.h.

$$(J_+^+)^{\dagger}(x^-) = J_-^+(x^-) \quad .\tag{B.5}$$

Die Operatoren kommutieren nicht. Zur Erhaltung der Hermitezität müssen sie daher symmetrisiert werden (Index s). Setzt man die entsprechenden Fourier-Entwicklungen der Komponenten von Φ und Π ein, so folgt

$$\begin{aligned}
J_3^+(x^-) = & \frac{1}{4L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[b_m^\dagger d_n^\dagger \left(\frac{u_m}{v_n} - \frac{v_n}{u_m} \right) e^{i(m+n)\frac{\pi}{L}x^-} \right. \\
& - b_m^\dagger b_n \left(\frac{u_m}{u_n} + \frac{u_n}{u_m} \right) e^{i(m-n)\frac{\pi}{L}x^-} + d_m d_n^\dagger \left(\frac{v_m}{v_n} + \frac{v_n}{v_m} \right) e^{-i(m-n)\frac{\pi}{L}x^-} \\
& \left. + d_m b_n \left(\frac{u_n}{v_m} - \frac{v_m}{u_n} \right) e^{-i(m+n)\frac{\pi}{L}x^-} \right] , \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_+^+(x^-) = & \frac{1}{4L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[(a_0 b_m^\dagger)_s \frac{1}{u_m} e^{i(m-m_0)\frac{\pi}{L}x^-} - (a_0 d_m)_s \frac{1}{v_m} e^{-i(m+m_0)\frac{\pi}{L}x^-} \right] \tag{B.7} \\
& + \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^{\Lambda} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[a_l^\dagger b_m^\dagger \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) e^{i(m-m_0+l)\frac{\pi}{L}x^-} - a_l^\dagger d_m \left(\frac{w_l}{v_m} + \frac{v_m}{w_l} \right) e^{-i(m+m_0-l)\frac{\pi}{L}x^-} \right. \\
& \left. + a_l b_m^\dagger \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) e^{i(m-m_0-l)\frac{\pi}{L}x^-} - a_l d_m \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) e^{-i(m+m_0+l)\frac{\pi}{L}x^-} \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_-^+(x^-) = & \frac{1}{4L} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[(a_0 b_m)_s \frac{1}{u_m} e^{-i(m-m_0)\frac{\pi}{L}x^-} - (a_0 d_m^\dagger)_s \frac{1}{v_m} e^{i(m+m_0)\frac{\pi}{L}x^-} \right] \tag{B.8} \\
& + \frac{1}{4L} \sum_{l=1}^{\Lambda} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left[a_l^\dagger d_m^\dagger \left(\frac{v_m}{w_l} - \frac{w_l}{v_m} \right) e^{i(m+m_0+l)\frac{\pi}{L}x^-} + a_l^\dagger b_m \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) e^{-i(m-m_0-l)\frac{\pi}{L}x^-} \right. \\
& \left. - a_l d_m^\dagger \left(\frac{v_m}{w_l} + \frac{w_l}{v_m} \right) e^{i(m+m_0-l)\frac{\pi}{L}x^-} + a_l b_m \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) e^{-i(m-m_0+l)\frac{\pi}{L}x^-} \right] .
\end{aligned}$$

Für die Transformation der Ströme in den diskreten Impulsraum definiert man die Fourier-Transformationen

$$J_3^+(x^-) = -\frac{1}{4L} \sum_{k \in \mathcal{Z}} e^{-ik\frac{\pi}{L}x^-} \tilde{J}_3(k) \quad , \quad J_\pm^+(x^-) = -\frac{1}{4L} \sum_{k \in \mathcal{B}} e^{-ik\frac{\pi}{L}x^-} \tilde{J}_\pm(k) \quad , \tag{B.9}$$

mit

$$(\tilde{J}_3(k))^\dagger = \tilde{J}_3(-k) \quad , \quad (\tilde{J}_-(k))^\dagger = \tilde{J}_+(-k) \quad . \tag{B.10}$$

Damit ergibt sich für die Ströme im Fourier-Raum

$$\begin{aligned}\tilde{J}_3(k) &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} b_m^\dagger b_n \left(\frac{u_m}{u_n} + \frac{u_n}{u_m} \right) \delta_{m+k}^n \\ &- \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} d_m d_n^\dagger \left(\frac{v_m}{v_n} + \frac{v_n}{v_m} \right) \delta_{n+k}^m - \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} d_m b_n \left(\frac{u_n}{v_m} - \frac{v_m}{u_n} \right) \delta_k^{m+n} ,\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_+(k) &= + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} (a_0 d_m)_s \frac{1}{v_m} \delta_k^m + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l d_m \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) \delta_k^{l+m} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l^\dagger d_m \left(\frac{w_l}{v_m} + \frac{v_m}{w_l} \right) \delta_{l+k}^m - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l b_m^\dagger \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_{m+k}^l ,\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_-(k) &= - \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} (a_0 b_m)_s \frac{1}{u_m} \delta_k^m - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l b_m \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_k^{l+m} \\ &- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l^\dagger b_m \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_{l+k}^m + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l d_m^\dagger \left(\frac{v_m}{w_l} + \frac{w_l}{v_m} \right) \delta_{m+k}^l .\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

Weiter werden die Ladungsoperatoren

$$Q_3(k) = \tilde{J}_3(k) , \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}Q_+(k) &= + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l d_m \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) \delta_k^{l+m} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l^\dagger d_m \left(\frac{w_l}{v_m} + \frac{v_m}{w_l} \right) \delta_{l+k}^m - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l b_m^\dagger \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_{m+k}^l ,\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned}Q_-(k) &= + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l b_m \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_k^{l+m} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l^\dagger b_m \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) \delta_{l+k}^m - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} a_l d_m^\dagger \left(\frac{v_m}{w_l} + \frac{w_l}{v_m} \right) \delta_{m+k}^l\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

und die symmetrischen Restterme

$$B_k \equiv \frac{1}{2} (a_0 b_k + b_k a_0) \quad \text{und} \quad D_k \equiv \frac{1}{2} (a_0 d_k + d_k a_0) \quad (\text{B.17})$$

eingeführt. Mit dieser Schreibweise lassen sich die Zwangsnullmoden–Terme aus den Ausdrücken der Fourier–transformierten Ströme separieren. Sie haben die Gestalt

$$\tilde{J}_+(k) \equiv Q_+(k) + \frac{D_k}{v_k} \quad , \quad -\tilde{J}_-(k) \equiv Q_-(k) + \frac{B_k}{u_k} \quad . \quad (\text{B.18})$$

B.3 Greensche Funktionen

Um die inhomogenen Differentialgleichungen (4.23) invertieren zu können, müssen geeignete diskrete Greensche Funktionen gemäß

$$(i\partial_-)^2 G_1(x^- - y^-) = \delta_L(x^- - y^-) - \frac{1}{2L} \quad , \quad (\text{B.19})$$

$$(i\partial_- - gv)^2 G_2(x^- - y^-) = \delta_L(x^- - y^-) \quad , \quad (\text{B.20})$$

$$(i\partial_- + gv)^2 G_3(x^- - y^-) = \delta_L(x^- - y^-) \quad (\text{B.21})$$

konstruiert werden. Der Zusammenhang mit den Feldern $A_3(x^-)$, $A_+(x^-)$ und $A_-(x^-)$ und den entsprechenden Strömen ist

$$A_3(x^-) = g \int_{-L}^L G_1(x^- - y^-) J_3^+(y^-) dy^- \quad , \quad (\text{B.22})$$

$$A_{\pm}(x^-) = g \int_{-L}^L G_{2,3}(x^- - y^-) J_{\pm}^+(y^-) dy^- \quad . \quad (\text{B.23})$$

Die drei Greenschen Funktionen werden mit Hilfe des Ansatzes

$$G_L(x^- - y^-) = \frac{L}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} \tilde{g}_L(n) \quad (\text{B.24})$$

bestimmt. Für einen linearen Operators \hat{O} gilt

$$\hat{O}(\partial_-) G_L(x^- - y^-) \equiv \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} \hat{O}(in) \tilde{g}_L(n) \quad . \quad (\text{B.25})$$

Die Gleichungen aus (B.19)–(B.21) haben die Form

$$(i\partial_-)^2 G_1(x^- - y^-) = \frac{1}{2L} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} n^2 \tilde{g}_1(n) \quad , \quad (\text{B.26})$$

$$(i\partial_- - gv)^2 G_2(x^- - y^-) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} (n+z)^2 \tilde{g}_2(n) \quad , \quad (\text{B.27})$$

$$(i\partial_- + gv)^2 G_3(x^- - y^-) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} (n-z)^2 \tilde{g}_3(n) \quad . \quad (\text{B.28})$$

Aufgrund der Identität

$$\delta_L(x^- - y^-) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} \quad (\text{B.29})$$

resultiert aus (B.26)–(B.28)

$$\tilde{g}_1(n) = \frac{1}{n^2} \quad , \quad \text{wobei } n \neq 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\tilde{g}_2(n) = \frac{1}{(n+z)^2} \quad , \quad \tilde{g}_3(n) = \frac{1}{(n-z)^2} \quad (\text{B.31})$$

und

$$G_1(x^- - y^-) = \frac{L}{2\pi^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \right) \frac{1}{n^2} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} \quad , \quad (\text{B.32})$$

$$G_{2,3}(x^- - y^-) = \frac{L}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n \pm z)^2} e^{in\frac{\pi}{L}(x^- - y^-)} \quad . \quad (\text{B.33})$$

Mit der Wahl der Greenschen Funktionen sowie der Ersetzung von $J_3^+(x^-)$ und $J_{\pm}^+(x^-)$ durch die diskreten Fourier-Transformierten aus den Gleichungen (B.9) und (B.10) können die Integrale über die Ströme aus Gleichung (4.68) umgeschrieben werden. Für das erste Integral ergibt sich

$$I_1 = \frac{g^2}{2} \int_{-L}^L dx^- J_3^+(x^-) \frac{1}{(i\partial_-)^2} J_3^+(x^-) \quad (\text{B.34})$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \hat{g}^2 \frac{L}{\pi} \frac{1}{k^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{J}_3^\dagger(k) \tilde{J}_3(k) + \tilde{J}_3(k) \tilde{J}_3^\dagger(k) \right) \end{cases} \quad . \quad (\text{B.35})$$

Mit den Substitutionen $n = m - \frac{1}{2}$ und $\zeta = z - \frac{1}{2}$ lassen sich die anderen beiden Stromintegrale in analoger Weise schreiben als

$$I_{2,3} = \frac{g^2}{2} \int_{-L}^L dx^- J_{\mp}^+(x^-) \frac{1}{(i\partial_- \mp gv)^2} J_{\pm}^+(x^-) \quad (\text{B.36})$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \hat{g}^2 \frac{L}{\pi} \frac{1}{(k \pm \zeta)^2} \sum_{k \in \mathbb{B}} \left(\tilde{J}_{\mp}^\dagger(k) \tilde{J}_{\mp}(k) + \tilde{J}_{\mp}(k) \tilde{J}_{\mp}^\dagger(k) \right) \end{cases} \quad . \quad (\text{B.37})$$

Anhang C

Die Zwangsgleichung

C.1 Algebraische Umformungen

Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Zwangsgleichung aus (4.19)

$$\left(D^\alpha D_\alpha + \mu_0^2\right) \Phi = 0 \quad . \quad (\text{C.1})$$

Nach Einsetzen der longitudinalen Komponenten für α und unter Spurbildung über die dritte Komponente τ^3 der Farbmatriizen folgt weiter

$$\frac{8\pi}{g^2} \text{Sp} \left\{ \tau^3 \left(2D^- D_- + \mu_0^2 \right) \Phi \right\} = 0 \quad . \quad (\text{C.2})$$

Schreibt man die kovariante Ableitung unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelationen aus (4.12) und der Spurbildung aus (4.13) explizit hin, so hat man

$$\frac{8\pi}{g^2} \left(-ig A_- (\partial_- + igv) \varphi_+ + ig A_+ (\partial_- - igv) \varphi_- + \frac{\mu_0^2}{2} \varphi_3 \right) = 0 \quad . \quad (\text{C.3})$$

Nach Integration über das Intervall $[-L, L]$ ergibt sich

$$\frac{8\pi i}{g} \int_{-L}^L \left(\varphi_+ (\partial_- - igv) A_- - \varphi_- (\partial_- + igv) A_+ \right) dx^- + \frac{4\pi}{g^2} \mu_0^2 \frac{a_0}{\sqrt{4\pi}} = 0 \quad . \quad (\text{C.4})$$

Unter Berücksichtigung der Gaußschen Gleichungen (4.23) und der Greenschen Funktionen aus B.3 gilt

$$-8\pi i \int_{-L}^L \left(\varphi_+ \frac{1}{(\partial_- - igv)} J_-^+ - \varphi_- \frac{1}{(\partial_- + igv)} J_+^+ \right) dx^- + \frac{4\pi}{g^2} \mu_0^2 \frac{a_0}{\sqrt{4\pi}} = 0 \quad (\text{C.5})$$

bzw. die kompakte Schreibweise

$$i \left\langle \varphi_+ \frac{1}{(\partial_- - igv)} J_-^+ - \varphi_- \frac{1}{(\partial_- + igv)} J_+^+ \right\rangle_{0,s} - \frac{\mu_0^2}{g^2 \sqrt{4\pi}} a_0 = 0 \quad . \quad (\text{C.6})$$

C.2 Transformation in den Impulsraum

Die Lösung der Zwangsgleichung findet sich, indem die Gleichung (C.6) in den Impulsraum transformiert und mit der sogenannten Diagrammmethode nach [146] ausgewertet wird. Die Fourier-Transformationen der Felder φ_{\pm} lauten

$$\varphi_{\pm}(x^-) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k \in H} e^{-ik \frac{\pi}{L} x^-} \tilde{\varphi}_{\pm}(k) \quad . \quad (\text{C.7})$$

Die Greenschen Funktionen haben die Gestalt

$$G_{\pm}(x^-) = \frac{1}{(i\partial_- \pm gv)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n \mp z} e^{in \frac{\pi}{L} x^-} \quad . \quad (\text{C.8})$$

Zudem wird die Substitution

$$\frac{4\pi\mu_0^2}{g^2} = \rho_0 \quad (\text{C.9})$$

vorgenommen. Für die Gleichung (C.6) gilt mit den Ersetzungen aus (B.9) und (C.7) bis (C.9)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(v_k^2 \left(\tilde{\varphi}_+^{\dagger}(k) \tilde{J}_+(k) + \tilde{\varphi}_+(k) \tilde{J}_+^{\dagger}(k) \right) - u_k^2 \left(\tilde{\varphi}_-^{\dagger}(k) \tilde{J}_-(k) + \tilde{\varphi}_-(k) \tilde{J}_-^{\dagger}(k) \right) \right) - \rho_0 a_0 = 0 \quad (\text{C.10})$$

bzw. in der Zerlegung nach (B.18)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=\frac{1}{2}}^{\Lambda} & \left(v_k^3 \left(d_k^{\dagger} Q_+(k) + d_k Q_-(k) \right) + v_k^2 \left(d_k^{\dagger} D_k + d_k D_k^{\dagger} \right) \right. \\ & \left. + u_k^3 \left(b_k^{\dagger} Q_-(k) + b_k Q_+(k) \right) + u_k^2 \left(b_k^{\dagger} B_k + b_k B_k^{\dagger} \right) \right) + \rho_0 a_0 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Setzt man die Ausdrücke für die Ladungen und die Restterme explizit ein, so ergibt sich nach genauer Auswertung und Zusammenfassung der Delta-Funktionen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} & \left(\left(b_n^{\dagger} b_n a_0 \right)_s u_n^2 + \left(d_n^{\dagger} d_n a_0 \right)_s v_n^2 \right) + \rho_0 a_0 = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{l+m}^l \left(a_l^{\dagger} b_m d_n + a_l b_m^{\dagger} d_n^{\dagger} \right) \left(v_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) + u_m^3 \left(\frac{w_l}{v_n} + \frac{v_n}{w_l} \right) \right) \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{l+m}^n \left(a_l^{\dagger} b_m^{\dagger} b_n + a_l b_m b_n^{\dagger} \right) \left(u_m^3 \left(\frac{w_l}{u_n} + \frac{u_n}{w_l} \right) + u_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) \right) \\ & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \delta_{l+m}^n \left(a_l^{\dagger} d_m^{\dagger} d_n + a_l d_m d_n^{\dagger} \right) \left(v_m^3 \left(\frac{v_n}{w_l} + \frac{w_l}{v_n} \right) + v_n^3 \left(\frac{w_l}{v_m} - \frac{v_m}{w_l} \right) \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Die linke Seite der obigen Gleichung enthält logarithmische Divergenzen in u_n bzw. v_n , und es muß ein *cutoff*-Parameter Λ eingeführt werden. Die *cutoff*-Divergenzen können mit Hilfe eines vom *cutoff* unabhängigen Massenterms absorbiert werden. Dazu wird eine Subtraktion der Summe für $\zeta = 0$ mit der physikalischen Masse ρ einheitlich zu (5.14) vorgenommen

$$\rho = \rho_0 + 2 \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \frac{1}{m} . \quad (\text{C.13})$$

Nach dieser Renormierung wird die linke Seite zu (C.12)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\left(b_m^\dagger b_m a_0 + b_m^\dagger a_0 b_m + a_0 b_m^\dagger b_m + (b_m a_0 b_m^\dagger - a_0) \right) u_m^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(d_m^\dagger d_m a_0 + d_m^\dagger a_0 d_m + a_0 d_m^\dagger d_m + (d_m a_0 d_m^\dagger - a_0) \right) v_m^2 \right) + \hat{\rho}(\zeta) a_0 , \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

mit

$$\hat{\rho}(\zeta) = \rho + G(\zeta) = \rho + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\Lambda} \left(\frac{1}{m+\zeta} + \frac{1}{m-\zeta} - \frac{2}{m} \right) . \quad (\text{C.15})$$

Die Matrixelemente der Nullmode a_0 sind damit vom *cutoff* unabhängig. Die Zwei-Teilchen- bzw. Drei-Teilchen-Operatoren auf der linken und rechten Seite von (C.12) werden im Sinne der in [146] entwickelten Diagrammtechnik als Propagatoren bzw. Wechselwirkungsverices interpretiert, siehe Tabelle C.1. Die Diagrammregeln sind analog zu den Feynman-Regeln formuliert, beschreiben aber mehr als die Zusammensetzung von S-Matrixelementen. Geschlossene Schleifen stellen die Summe über alle positiven ganz- oder halbzahligen Impulse und abgetrennte Diagramme eine Multiplikation entsprechender Ausdrücke dar. Eine hermitesche Konjugation erfolgt über die Spiegelung des entsprechenden Diagramms, wobei die Pfeilrichtungen der ein- und auslaufenden Linien beibehalten werden. Bei Ladungskonjugation kehrt sich die Pfeilrichtung um. Matrixelemente setzen sich aus den ein- und auslaufenden Linien an einer Blase zusammen, die den Operator repräsentiert.

Die vom *cutoff* unabhängigen Matrixelemente der Zwangsgleichung können in einem speziellen Teilchensektor betrachtet werden. Entscheidend dabei ist, daß die Zwangsnullmode alle Teilchensektoren miteinander verbindet und die Rolle einer effektiven Wechselwirkung spielt. Die relevanten Beiträge zum Vakuum Erwartungswert kommen nach Analyse der Zwangsgleichung in verschiedenen Teilchensektoren von den Matrixelementen von a_0 des niedrigsten, d.h. des Drei-Teilchensektors [146]. Im schwachen Limes $\tilde{g} \rightarrow 0$ findet eine Kopplung an das Vakuum in der Hierarchie der Teilchensektoren nicht statt. In diesem Fall ist der Vakuum Erwartungswert $\langle 0|a_0|0 \rangle$ Null. Eine weitere Reduktion der nicht

verschwindenden Matrixelemente folgt über die Kommutatorrelationen

$$[a_0, Q_0] = 0 \quad , \quad [a_0, P^+] = 0 \quad (\text{C.16})$$

für a_0 . Impulserhaltung in den Vertices bedeutet, daß die Matrixelemente von a_0 , die nicht mit den Grundvertices von Tabelle C.1 darstellbar sind, verschwinden.

Für die Zwangsgleichung liegt eine iterative Lösung im Sinne einer schwachen Kopp-
lungsentwicklung nach Kalloniatis [146] vor, die im wesentlichen zu einer Drei-Teilchen-
Operatorgestalt für a_0 führt. Diese wird für die Berechnung des Zwangspotentials heran-
gezogen. Man hat

$$\begin{aligned} a_0 = & \sum_{l,m,n} \left[\mathcal{C}_0^{lmn}(\zeta) \delta_{m+n}^l (a_l^\dagger b_m d_n + h.c.) \right. \\ & \left. + \mathcal{C}_1^{lmn}(\zeta) \delta_{m+l}^n (b_n^\dagger b_m a_l + h.c.) + \mathcal{C}_1^{lmn}(-\zeta) \delta_{m+l}^n (d_n^\dagger d_m a_l + h.c.) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Bei der Analyse ergab sich, daß in jeder Iterationsordnung die Vertexbeiträge von $\Gamma_0^{lmn}(\zeta)$ und $\Gamma_1^{lmn}(\pm\zeta)$ voneinander entkoppelt sind. Eine Mischung der Teilchensektoren erfolgt ausschließlich über die *Contractions* zwischen b mit b^\dagger und d mit d^\dagger . Im Lösungsansatz der obigen Gleichung wurden diese als effektive Drei-Teilchen-Operatoren mit einer Ersetzung Σ behandelt. Da keine Mischung zwischen den b - und d -Moden auftritt, ist

$$\Sigma_m(\zeta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=r}^N (\Delta_m(\zeta))^r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \Delta_m(\zeta)^N}{1 - \Delta_m(\zeta)} \cdot \Delta_m(\zeta) \quad (\text{C.18})$$

eine Summe über alle Produktordnungen des Basispropagators für einen gegebenen Wert von ζ . Die niedrigste Mode $m = \frac{1}{2}$ liefert einen großen Beitrag im Propagator. Alle anderen Moden sind unterdrückt, da $|\Delta_m(\zeta)| < 1$ gilt.

Die Koeffizienten \mathcal{C}_i^{lmn} werden nach Einsetzen von (C.17) in (C.12) im Drei-Teilchensektor berechnet. Diese liefern den entscheidenden Anteil. Für \mathcal{C}_0^{lmn} und \mathcal{C}_1^{lmn} ergibt sich

$$\mathcal{C}_0^{lmn}(\zeta) = \frac{\Gamma_0^{lmn}(\zeta)}{\mathcal{D}_{m,n}^0(\zeta)} \quad , \quad \mathcal{C}_1^{lmn}(\zeta) = \frac{\Gamma_1^{lmn}(\zeta)}{\mathcal{D}_{m,n}^1(\zeta)} \quad , \quad (\text{C.19})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m,n}^0(\zeta) & \equiv \Delta_m(\zeta) + \Delta_n(-\zeta) + \Sigma_m(\zeta) + \Sigma_n(-\zeta) + \hat{\rho}(\zeta) \quad , \\ \mathcal{D}_{m,n}^1(\zeta) & \equiv \Delta_m(\zeta) + \Delta_n(\zeta) + \Sigma_m(\zeta) + \Sigma_n(\zeta) + \hat{\rho}(\zeta) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Damit haben die Matrixelemente des kleinsten Teilchensektors die Form

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_l a_0 b_m^\dagger d_n^\dagger | 0 \rangle & = \delta_{m+n}^l \mathcal{C}_0^{lmn}(\zeta) \quad , \\ \langle 0 | b_{m'} a_0 b_m^\dagger a_l^\dagger | 0 \rangle & = \delta_{m+l}^{m'} \mathcal{C}_1^{lmm'}(\zeta) \quad , \\ \langle 0 | d_{n'} a_0 d_n^\dagger a_l^\dagger | 0 \rangle & = \delta_{n+l}^{n'} \mathcal{C}_1^{lnn'}(-\zeta) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$


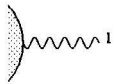
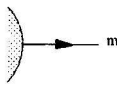
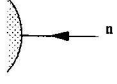


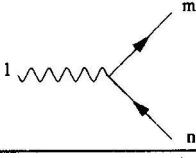
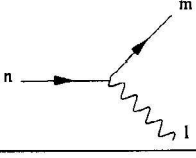
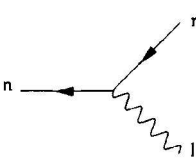
Graph	Diagrammregel
	a_0
	$a_l^\dagger 0\rangle$
	$b_m^\dagger 0\rangle$
	$d_n^\dagger 0\rangle$
	$\Delta_m(\zeta) = \frac{1}{2(m+\zeta)}$
	$\Delta_n(-\zeta) = \frac{1}{2(n-\zeta)}$
	$\Gamma_0^{lmn}(\zeta) = v_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} + \frac{u_m}{w_l} \right) + u_m^3 \left(\frac{w_l}{v_n} + \frac{v_n}{w_l} \right)$
	$\Gamma_1^{lmn}(\zeta) = u_n^3 \left(\frac{w_l}{u_m} - \frac{u_m}{w_l} \right) + u_m^3 \left(\frac{w_l}{u_n} + \frac{u_n}{w_l} \right)$
	$\Gamma_1^{lmn}(-\zeta) = v_n^3 \left(\frac{w_l}{v_m} + \frac{v_m}{w_l} \right) + v_m^3 \left(\frac{w_l}{v_n} + \frac{v_n}{w_l} \right)$

Tabelle C.1: Die Diagrammregeln für die Zwangsgleichungsterme.

Anhang D

Der Lichtkegelenergieoperator

Die drei folgenden Tabellen beinhalten alle Terme des Energieoperators aus (4.70) und sind nach der Anzahl der Einteilchenoperatoren zusammengefaßt. Die Schlangenlinien stehen für die Gluonenoperatoren a_k^\dagger (bzw. a_k), die nach rechts zeigenden Pfeile für die Operatoren b_k^\dagger (bzw. b_k) und die nach links zeigenden Pfeile für die Operatoren d_k^\dagger (bzw. d_k). Die senkrechten Linien sind Instantonen. Die Masse μ_0^2 wurde dabei zur Beseitigung der Divergenzen durch die renormierte Masse μ^2 aus Gleichung (4.6) mit geeigneten Konstanten ersetzt, die den Grundzustand für $\mu^2 = 0$ erreichen.

D.1 Wechselwirkungsgraphen der *Contractions*

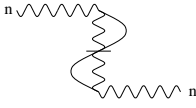
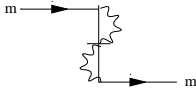
Graph	Matrizelement
	$I_n(\zeta) = \mu^2 + \frac{g^2}{16\pi} \left(16 + 16n \sum_{k=\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{k^2 + \zeta^2}{(k^2 - \zeta^2)^2} + \zeta^2 \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{4}{m(m^2 - \zeta^2)} \right)$
	$J_m(\zeta) = \mu^2 + \frac{g^2}{16\pi} \left(16 + 8(m + \zeta) \left(\sum_{k=\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \frac{k^2 + \zeta^2}{(k^2 - \zeta^2)^2} + \sum_{k=1}^{m-\frac{1}{2}} \frac{1}{k^2} \right) + 4 \frac{m + \zeta}{(m - \zeta)^2} \right. \\ \left. + \zeta^2 \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{2}{n(n^2 - \zeta^2)} + \zeta(m + \zeta) \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{16k}{(k^2 - \zeta^2)^2} \right)$
$\frac{\pi}{L} P_C^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\zeta)}{n} a_n^\dagger a_n + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{J_m(+\zeta)}{m + \zeta} b_m^\dagger b_m + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{J_m(-\zeta)}{m - \zeta} d_m^\dagger d_m$	

Tabelle D.1: Die *Contractions* und ihre Operatorstruktur. Die renormierte Masse μ^2 wird im Falle $L \rightarrow \infty$ gleich Null.

D.2 Wechselwirkungsgraphen der *Seagulls*

Graph	Matrizelement
	$S_{bb}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_1+\zeta}{n_3+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_1+\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_4+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_4+\zeta}{n_2+\zeta}} \right) \frac{\hat{g}^2}{(n_1-n_3)^2}$
	$S_{bd}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_1+\zeta}{n_3+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_1+\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_2-\zeta}{n_4-\zeta}} + \sqrt{\frac{n_4-\zeta}{n_2-\zeta}} \right) \frac{(-2)\hat{g}^2}{(n_1-n_3)^2}$ $+ \left(\sqrt{\frac{n_2-\zeta}{n_1+\zeta}} - \sqrt{\frac{n_1+\zeta}{n_2-\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_4-\zeta}{n_3+\zeta}} - \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_4-\zeta}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1+n_2)^2}$
	$S_{ab}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_4}{n_2+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_4}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_1}{n_3+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_1}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1-n_3-\zeta)^2}$ $+ \left(\sqrt{\frac{n_1}{n_2+\zeta}} - \sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_1}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_4}{n_3+\zeta}} - \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_4}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1+n_2+\zeta)^2}$
	$S_{aa}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_1}{n_3+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_1}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_4-\zeta}} + \sqrt{\frac{n_4-\zeta}{n_2}} \right) \frac{(-2\hat{g}^2)}{(n_1-n_3+\zeta)^2}$
$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} P_S^- = & \sum_{n_i} S_{bb}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) b_{n_1}^\dagger b_{n_2}^\dagger b_{n_3} b_{n_4} + S_{bb}(n_1, n_2; n_3, n_4; -\zeta) d_{n_1}^\dagger d_{n_2}^\dagger d_{n_3} d_{n_4} \\ & + \sum_{n_i} S_{bd}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) b_{n_1}^\dagger d_{n_2}^\dagger b_{n_3} d_{n_4} \\ & + \sum_{n_i} S_{aa}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) (a_{n_1}^\dagger a_{n_2}^\dagger b_{n_3} d_{n_4} + d_{n_4}^\dagger b_{n_3}^\dagger a_{n_2} a_{n_1}) \\ & + \sum_{n_i} S_{ab}(n_1, n_2; n_3, n_4; \zeta) a_{n_1}^\dagger b_{n_2}^\dagger b_{n_3} a_{n_4} + S_{ab}(n_1, n_2; n_3, n_4; -\zeta) a_{n_1}^\dagger d_{n_2}^\dagger d_{n_3} a_{n_4} \end{aligned}$	

Tabelle D.2: Die *Seagulls* und ihre Operatorstruktur. Bei der Summation ist zu beachten, daß für die Indices der Operatoren a_{n_i} und $a_{n_i}^\dagger$ die Summation über ganzzahlige Werte läuft, für die Operatoren b_{n_i} , $b_{n_i}^\dagger$, d_{n_i} und $d_{n_i}^\dagger$ dagegen über halbzahlige Werte.

D.3 Wechselwirkungsgraphen der *Forks*

Graph	Matrizelement
	$F_{ba}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_1+\zeta}{n_2+\zeta}} + \sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_1+\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_3+\zeta}{n_4-\zeta}} - \sqrt{\frac{n_4-\zeta}{n_3+\zeta}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1-n_2)^2}$
	$F_{bb}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_1+\zeta}{n_2}} + \sqrt{\frac{n_2}{n_1+\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_4+\zeta}{n_3}} - \sqrt{\frac{n_3}{n_4+\zeta}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1-n_2+\zeta)^2}$
 	$F_{ab}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) = \left(\sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_1}} + \sqrt{\frac{n_1}{n_2+\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_4}{n_3-\zeta}} - \sqrt{\frac{n_3-\zeta}{n_4}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1-n_2-\zeta)^2}$ $+ \left(\sqrt{\frac{n_3-\zeta}{n_1}} + \sqrt{\frac{n_1}{n_3-\zeta}} \right) \left(\sqrt{\frac{n_4}{n_2+\zeta}} - \sqrt{\frac{n_2+\zeta}{n_4}} \right) \frac{2\hat{g}^2}{(n_1-n_3+\zeta)^2}$
$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} P_F^- = & \sum_{n_i} F_{ba}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) b_{n_1}^\dagger b_{n_2} b_{n_3} d_{n_4} + F_{ba}(n_1; n_2, n_3, n_4; -\zeta) d_{n_1}^\dagger d_{n_2} d_{n_3} b_{n_4} \\ & + \sum_{n_i} F_{bb}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) b_{n_1}^\dagger a_{n_2} a_{n_3} b_{n_4} + F_{bb}(n_1; n_2, n_3, n_4; -\zeta) d_{n_1}^\dagger a_{n_2} a_{n_3} d_{n_4} \\ & + \sum_{n_i} F_{ab}(n_1; n_2, n_3, n_4; \zeta) a_{n_1}^\dagger b_{n_2} d_{n_3} a_{n_4} + h.c. \end{aligned}$	

Tabelle D.3: Fork-Graphen und ihre Operatorstruktur. Auch hier gilt die gleiche Summation wie für die Seagull-Operatoren. Wegen der Impulserhaltung muß jedes Element mit dem Faktor $\delta_{n_2+n_3+n_4}^{n_1}$ multipliziert werden.

Anhang E

Die ausgeartete hypergeometrische Differentialgleichung

Die Differentialgleichung aus (5.25) für das doppelte Oszillatorpotential auf dem *fundamental modular domain*

$$-4 \frac{d^2 \psi_r(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \lambda (|\zeta| - \kappa)^2 \psi_r(\zeta) = (E_r + \frac{1}{2} \lambda \kappa^2) \psi_r(\zeta) = E'_r \psi_r(\zeta) \quad , \quad (\text{E.1})$$

kann mit Hilfe der Substitutionen

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta - \kappa) \quad (\zeta > 0) \quad , \quad \xi' = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta + \kappa) \quad (\zeta < 0) \quad , \quad E'_r = \sqrt{8\lambda} \left(r + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad (\text{E.2})$$

wobei

$$\frac{d^2 \psi_r(\zeta)}{d\zeta^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{d^2 \psi_r(\xi)}{d\xi^2} \quad , \quad (\text{E.3})$$

als konfluente hypergeometrische Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^2 \psi_r(\xi)}{d\xi^2} + \left(r + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4}\right) \psi_r(\xi) = 0 \quad (\text{E.4})$$

bzw.

$$\frac{d^2 \psi_r(\xi')}{d\xi'^2} + \left(r + \frac{1}{2} - \frac{\xi'^2}{4}\right) \psi_r(\xi') = 0 \quad (\text{E.5})$$

geschrieben werden. Sie kann anschließend für die Randbedingungen ζ bzw. $\xi \rightarrow \pm\infty$ untersucht werden. Sucht man eine im Nullpunkt reguläre Lösung in Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe und verwendet die Methode der unbestimmten Koeffizienten, so erhält man die Lösungen

$$v_1(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2}} u_1(\xi) = 2^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} f\left(-\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\xi^2}{2}\right) \quad (\text{E.6})$$

und

$$v_2(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2}} u_2(\xi) = 2^{-\frac{3}{4}} \xi e^{-\frac{\xi^2}{4}} f\left(-\frac{r}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\xi^2}{2}\right) , \quad (\text{E.7})$$

mit der konfluenten hypergeometrischen oder Kummerschen Funktion

$$f(\alpha, \gamma; t) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{t}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{t^2}{2!} + \dots . \quad (\text{E.8})$$

Für die allgemeine Lösung gilt

$$v(\xi) = A v_1(\xi) + B v_2(\xi) \quad , \quad A = \frac{2^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-r}{2})} \quad , \quad B = \frac{2^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{r}{2})} . \quad (\text{E.9})$$

$\Gamma(x)$ ist die Eulersche Gamma-Funktion für beliebige Zahlen x . Damit ergeben sich für $v(\xi)$ als allgemeine Lösung die sogenannten parabolischen Zylinderfunktionen

$$Z_r(\xi) = 2^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-r}{2})} f\left(-\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\xi^2}{2}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{r}{2})} f\left(\frac{1-r}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\xi^2}{2}\right) \right) . \quad (\text{E.10})$$

Da sich (E.4) (bzw. (E.5)) bei den Transformationen

$$\xi \rightarrow -\xi \quad , \quad r, \xi \rightarrow -(r+1), \pm i\xi \quad (\text{E.11})$$

nicht ändert, existieren ebenso die Lösungen $Z_r(-\xi)$, $Z_{-(r+1)}(i\xi)$ und $Z_{-(r+1)}(-i\xi)$, wobei

$$\begin{aligned} Z_{-(r+1)}(i\xi) &= \frac{2^{-(\frac{r+1}{2})} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2}+1)} e^{\frac{\xi^2}{4}} f\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\xi^2}{2}\right) \\ &+ \frac{2^{-\frac{r}{2}-1} \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2}+\frac{1}{2})} i\xi e^{\frac{\xi^2}{4}} f\left(\frac{r}{2}+1, \frac{3}{2}; -\frac{\xi^2}{2}\right) , \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

$$\begin{aligned} Z_{-(r+1)}(-i\xi) &= \frac{2^{-(\frac{r+1}{2})} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2}+1)} e^{\frac{\xi^2}{4}} f\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\xi^2}{2}\right) \\ &- \frac{2^{-\frac{r}{2}-1} \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2}+\frac{1}{2})} i\xi e^{\frac{\xi^2}{4}} f\left(\frac{r}{2}+1, \frac{3}{2}; -\frac{\xi^2}{2}\right) . \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Die zwei letzteren parabolischen Zylinderfunktionen lassen sich als Linearkombination

$$Z_r(\xi) = a Z_{-(r+1)}(i\xi) + b Z_{-(r+1)}(-i\xi) \quad , \quad (\text{E.14})$$

mit a und b als Konstanten, schreiben. Die Konstanten werden durch Vergleich der Koeffizienten der linken und rechten Seite der Gleichung (E.14) bestimmt

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{2^r \sqrt{2} \Gamma(\frac{r}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1-r}{2})} = \frac{\sqrt{2} \Gamma(r+1) \cos \frac{r\pi}{2}}{\sqrt{\pi}} , \\ a - b &= \frac{2^r \sqrt{2} \Gamma(\frac{r}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{r}{2})} i = -\frac{\sqrt{2} \Gamma(r+1) \sin \frac{r\pi}{2}}{\sqrt{\pi}} i . \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Dabei wurden die Ersetzungen

$$2^{2t-1} \Gamma(t) \Gamma\left(t + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2t) \quad , \quad \Gamma(t) \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t} \quad (\text{E.16})$$

vorgenommen. Löst man die Gleichungen in (E.15) nach den Koeffizienten a und b auf, so gilt

$$a = \frac{\Gamma(r+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{r\pi i}{2}} \quad , \quad b = \frac{\Gamma(r+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r\pi i}{2}} \quad , \quad (\text{E.17})$$

und für die allgemeine Lösung folgt

$$Z_r(\xi) = \frac{\Gamma(r+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{r\pi i}{2}} Z_{-(r+1)}(i\xi) + e^{-\frac{r\pi i}{2}} Z_{-(r+1)}(-i\xi) \right) \quad . \quad (\text{E.18})$$

Um zu sehen, wann die Lösungen konvergieren und normiert werden können, wird die Differentialgleichung aus (E.4) (bzw. (E.5)) einer weiteren Transformation mit den Variablenersetzungen

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \xi^2 & \Rightarrow & \quad \frac{d^2 \psi_r(\xi)}{d\xi^2} = 2\chi \frac{d^2 \psi_r(\chi)}{d\chi^2} + \frac{d\psi_r(\chi)}{d\chi} \\ \psi_r &= e^{-\frac{\chi}{2}} \phi_r & \Rightarrow & \quad \frac{d\psi_r(\chi)}{d\chi} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\chi}{2}} \phi_r(\chi) + e^{-\frac{\chi}{2}} \frac{d\phi_r(\chi)}{d\chi} \\ & & \Rightarrow & \quad \frac{d^2 \psi_r(\chi)}{d\chi^2} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\chi}{2}} \phi_r(\chi) - e^{-\frac{\chi}{2}} \frac{d\phi_r(\chi)}{d\chi} + e^{-\frac{\chi}{2}} \frac{d^2 \phi_r(\chi)}{d\chi^2} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

unterzogen und auf die Gestalt der sogenannten ausgearteten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\chi \frac{d^2 \phi_r(\chi)}{d\chi^2} + \left(\frac{1}{2} - \chi \right) \frac{d\phi_r(\chi)}{d\chi} + \frac{1}{2} r \phi_r(\chi) = 0 \quad (\text{E.20})$$

gebracht. Nach Rücktransformation für ξ und unter Berücksichtigung von

$$\frac{d\phi_r}{d\chi} = \frac{1}{\xi} \frac{d\phi_r}{d\xi} \quad , \quad \frac{d^2 \phi_r}{d\chi^2} = -\frac{1}{\xi^3} \frac{d\phi_r}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{d^2 \phi_r}{d\xi^2} \quad (\text{E.21})$$

erhält man die Laplacesche Gestalt

$$\frac{d^2 \phi_r(\xi)}{d\xi^2} - \xi \frac{d\phi_r(\xi)}{d\xi} + r \phi_r(\xi) = 0 \quad . \quad (\text{E.22})$$

Diese Differentialgleichung kann mit Hilfe der Laplace-Transformation über den Ansatz

$$\phi_r(\xi) = \int_{\mathcal{I}} \varphi(\omega) e^{\xi\omega} d\omega \quad (\text{E.23})$$

gelöst werden. $\varphi(\omega)$ ist eine gesuchte Funktion von ω und \mathcal{I} ein gesuchter, von ξ unabhängiger Integrationsweg. Differenziert man nach ξ , so ergibt sich

$$\frac{d\phi_r}{d\xi} = \int_{\mathcal{I}} \varphi(\omega) \omega e^{\xi\omega} d\omega \quad , \quad \frac{d^2\phi_r}{d\xi^2} = \int_{\mathcal{I}} \varphi(\omega) \omega^2 e^{\xi\omega} d\omega \quad . \quad (\text{E.24})$$

Setzt man die Gleichungen aus (E.23) und (E.24) in die aus (E.22) ein, so hat man

$$\int_{\mathcal{I}} [\omega^2 + r - \omega \xi] e^{\xi\omega} \varphi(\omega) d\omega = 0 \quad . \quad (\text{E.25})$$

Außerdem folgt nach partieller Integration des letzten Terms aus (E.25) und unter Berücksichtigung, daß $\varphi(\omega)$ auf dem Kontur \mathcal{I} verschwindet

$$(\omega^2 + r) \varphi(\omega) = -\frac{d}{d\omega} [\omega \varphi(\omega)] \quad (\text{E.26})$$

und damit

$$\int_{\mathcal{I}} d[\omega \varphi(\omega) e^{\xi\omega}] = 0 \quad . \quad (\text{E.27})$$

Aus Gleichung (E.27) erhält man zudem

$$\frac{d\varphi(\omega)}{\varphi(\omega)} = -\frac{\omega^2 + r + 1}{\omega} d\omega \quad (\text{E.28})$$

und

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega} e^{-\int_{\mathcal{I}} \frac{\omega^2+r}{\omega} d\omega} = -e^{-\frac{\omega^2}{2}} \omega^{-r-1} d\omega \quad . \quad (\text{E.29})$$

Setzt man das obige Ergebnis in die Gleichung (E.23) ein, so gilt

$$\phi_r(\xi) = -\int_{\mathcal{I}} e^{\xi\omega - \frac{\omega^2}{2}} \omega^{-r-1} d\omega \quad . \quad (\text{E.30})$$

Um einen Kontur \mathcal{I}' von $+\infty$ nach $+\infty$ um $\omega = 0$ zu führen, wird die Variablentransformation $\omega = -\omega'$ durchgeführt. Die neue Funktion lautet

$$\phi_r(\xi) = \int_{\mathcal{I}'} e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' \quad . \quad (\text{E.31})$$

Nach den Gleichungen (E.19) und (E.4) bzw. (E.5) hat man

$$e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{\mathcal{I}'} e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' = c_1 Z_r(\xi) + c_2 Z_{-(r+1)}(i\xi) \quad (\text{E.32})$$

und

$$\frac{d}{d\xi} \left[e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{\mathcal{I}'} e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' \right] = c_1 \frac{d}{d\xi} Z_r(\xi) + c_2 \frac{d}{d\xi} Z_{-(r+1)}(i\xi) \quad . \quad (\text{E.33})$$

c_1 und c_2 können am Punkt $\xi = 0$ über

$$\int_{I'} e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' = c_1 Z_r(0) + c_2 Z_{-(r+1)}(0) \quad (\text{E.34})$$

und

$$\int_{I'} e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r} d\omega' = c_1 \frac{d}{d\xi} Z_r(0) + c_2 \frac{d}{d\xi} Z_{-(r+1)}(0) \quad (\text{E.35})$$

bestimmt werden. Unter Verwendung der Hankelschen Formel [162]

$$\int_{I''} (-t)^{x-1} e^{-t} dt = -2i \sin x\pi \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{E.36})$$

ergibt sich für die linken Seiten der Gleichungen (E.34) und (E.35)

$$\begin{aligned} \int_{I'} e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' &= 2i \sin r\pi \int_0^\infty e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (\omega')^{-r-1} d\omega' \\ &= 2^{-\frac{r}{2}} i \sin r\pi \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{r}{2}-1} du \\ &= 2^{-\frac{r}{2}} i \sin r\pi \Gamma\left(-\frac{r}{2}\right) , \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

$$\begin{aligned} \int_{I'} e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r} d\omega' &= -2i \sin r\pi \int_0^\infty e^{-\frac{(\omega')^2}{2}} (\omega')^{-r} d\omega' \\ &= -2^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} i \sin r\pi \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{r-1}{2}-1} du \\ &= -2^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} i \sin r\pi \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) . \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

Aus den Gleichungen (E.10) und (E.12) folgt weiter

$$Z_r(0) = \frac{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)} , \quad Z_{-(r+1)}(0) = \frac{2^{-\frac{(r+1)}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} , \quad (\text{E.39})$$

$$\frac{d}{d\xi} Z_r(0) = \frac{2^{\frac{r-1}{2}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{r}{2}\right)} , \quad \frac{d}{d\xi} Z_{-(r+1)}(0) = \frac{2^{-\frac{r}{2}-1} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} i . \quad (\text{E.40})$$

Setzt man die obigen Ergebnisse in (E.34) und (E.35) ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$c_1 \frac{2^r}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)} + c_2 \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} = \frac{i \sin r\pi}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{r}{2}\right) , \quad (\text{E.41})$$

$$c_1 \frac{2^r}{\Gamma\left(-\frac{r}{2}\right)} + c_2 \frac{2^{-\frac{1}{2}} i}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} = \frac{i \sin r\pi}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) . \quad (\text{E.42})$$

Dividiert man die obigen Gleichungen durch die jeweilige Gamma-Funktion der rechten Seite und subtrahiert die zweite Gleichung von der ersten, so gilt $c_2 = 0$, da

$$c_2 2^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{r}{2}\right)} - \frac{i}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)} \right) = 0 \quad . \quad (\text{E.43})$$

Mit den Ersetzungen

$$\Gamma\left(-\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = 2^{r+1} \sqrt{\pi} \Gamma(-r) \quad (\text{E.44})$$

und

$$\Gamma(-r) = -\frac{\pi}{\sin r\pi \Gamma(r+1)} \quad (\text{E.45})$$

hat man

$$c_1 = \frac{i \sin r\pi}{2^r \sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = 2i \sin r\pi \Gamma(-r) = -\frac{2\pi i}{\Gamma(r+1)} \quad . \quad (\text{E.46})$$

Die Integraldarstellung der Funktion $Z_r(\xi)$ lautet also

$$Z_r(\xi) = -\frac{\Gamma(r+1)}{2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{I'} e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} (-\omega')^{-r-1} d\omega' \quad . \quad (\text{E.47})$$

Nach Gleichung (E.27) gilt

$$\begin{aligned} \int_{I'} \frac{d}{d\omega'} \left((-\omega')^{-r} e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} \right) d\omega' = \\ \int_{I'} \left(r(-\omega')^{-r-1} - \xi(-\omega')^{-r} + (-\omega')^{-r+1} \right) e^{-\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}} d\omega' = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Multipliziert man die obige Gleichung mit $\frac{\Gamma(r+1)}{2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, so folgt unter Berücksichtigung von $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ und Gleichung (E.47) die Rekursionsformel

$$Z_r(\xi) - \xi Z_{r-1}(\xi) + (r-1) Z_{r-2}(\xi) = 0 \quad (\text{E.49})$$

bzw. nach Differentiation von (E.47)

$$\frac{d}{d\xi} Z_r(\xi) - \frac{\xi}{2} Z_r(\xi) + r Z_{r-1}(\xi) = 0 \quad . \quad (\text{E.50})$$

Für $r = n > 0$, mit n als ganze Zahl, ergibt sich

$$Z_n(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{I'} \frac{e^{\xi\omega' - \frac{(\omega')^2}{2}}}{(\omega')^{n+1}} d\omega' \quad (\text{E.51})$$

oder

$$Z_n(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} e^{\frac{\xi^2}{4}} \int_{\mathcal{I}_1} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{(t-\xi)^{n+1}} dt \quad , \quad (\text{E.52})$$

wobei $\omega' = \xi - t$ ersetzt wurde. Nach dem Satz von Cauchy hat man

$$\int_{\mathcal{I}_1} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{(t-\xi)^{n+1}} dt = 2\pi i \operatorname{Res}_{t \rightarrow \xi} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{(t-\xi)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \lim_{t \rightarrow \xi} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right) = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) \quad (\text{E.53})$$

und

$$Z_n(\xi) = (-1)^n e^{\frac{\xi^2}{4}} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) \quad . \quad (\text{E.54})$$

Für $m \neq n$ und $m > 0, n > 0$ ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} Z_m(\xi) + \left(m + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) Z_m(\xi) &= 0 \\ \frac{d^2}{d\xi^2} Z_n(\xi) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) Z_n(\xi) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.55})$$

Multipliziert man die obigen Differentialgleichungen mit jeweils der entsprechenden parabolischen Zylinderfunktion des anderen Index und subtrahiert sie voneinander, so resultiert daraus

$$Z_n(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} Z_m(\xi) - Z_m(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} Z_n(\xi) + (m - n) Z_n(\xi) Z_m(\xi) = 0 \quad (\text{E.56})$$

bzw.

$$\frac{d}{d\xi} \left(Z_n(\xi) \frac{d}{d\xi} Z_m(\xi) - Z_m(\xi) \frac{d}{d\xi} Z_n(\xi) \right) + (m - n) Z_n(\xi) Z_m(\xi) = 0 \quad . \quad (\text{E.57})$$

Integriert man über das Intervall $(-\infty, \infty)$, so verschwinden die ersten beiden Terme, und man erhält die Orthogonalitätseigenschaft der parabolischen Zylinderfunktionen mit der Gewichtsfunktion $r(\xi) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_n(\xi) Z_m(\xi) d\xi = 0 \quad (m \neq n) \quad . \quad (\text{E.58})$$

Um das Integral aus (E.58) zu normieren, verwendet man die Rekursionsformel aus (E.50), multipliziert diese mit der Funktion $Z_{n-1}(\xi)$ und integriert über das Intervall $(-\infty, +\infty)$. Es folgt

$$\begin{aligned} n \int_{-\infty}^{+\infty} (Z_{n-1}(\xi))^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{n-1}(\xi) \frac{d}{d\xi} Z_n(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{2} Z_{n-1}(\xi) Z_n(\xi) d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{d\xi} (Z_{n-1}(\xi)) Z_n(\xi) - \frac{\xi}{2} Z_{n-1}(\xi) Z_n(\xi) \right) d\xi \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

Nach den Rekursionsformeln aus (E.49) und (E.50) können die beiden obigen Terme auf die Gestalt

$$\frac{d}{d\xi}(Z_{n-1}(\xi)) Z_n(\xi) = (n-1) Z_{n-2}(\xi) Z_n(\xi) - \frac{\xi}{2} Z_{n-1}(\xi) Z_n(\xi) \quad (\text{E.60})$$

$$\frac{\xi}{2} Z_{n-1}(\xi) Z_n(\xi) = \frac{1}{2} (Z_n(\xi))^2 + \frac{n-1}{2} Z_{n-2}(\xi) Z_n(\xi) \quad (\text{E.61})$$

gebracht werden. Setzt man dies in (E.59) ein, so lautet die Normierungsbedingung

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} (Z_{n-1}(\xi))^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (Z_n(\xi))^2 d\xi \quad . \quad (\text{E.62})$$

Für $Z_0(\xi)$ ergibt sich mit Gleichung (E.54)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Z_0(\xi))^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \sqrt{2\pi} \quad (\text{E.63})$$

und eingesetzt in die Gleichung (E.62)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Z_n(\xi))^2 d\xi = n! \sqrt{2\pi} \quad . \quad (\text{E.64})$$

Die normierten doppelten Oszillatoreigenfunktionen sind für positive Werte von ζ proportional zu $Z_n(\xi)$ und für negative Werte von ζ proportional zu $Z_n(-\xi')$. Beide Lösungen der jeweiligen Differentialgleichung aus (E.4) bzw. (E.5) müssen bei $\zeta = 0$ ineinander übergehen. An diesem Punkt sind die beiden parabolischen Potentiale nicht stetig. Die singuläre Potentialfunktion kann im Sinne einer Grenzfallbetrachtung durch eine reguläre Funktion approximiert werden. ψ_n und die erste Ableitung von ψ_n sind überall glatt, da die Schrödingergleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Ist $\zeta = \zeta_0$ der singuläre Punkt, so erhält man durch Integration der Schrödingergleichung von $\zeta = \zeta_0 - \epsilon$ nach $\zeta = \zeta_0 + \epsilon$

$$\frac{d\psi_n}{d\zeta}(\zeta_0 + \epsilon) - \frac{d\psi_n}{d\zeta}(\zeta_0 - \epsilon) = \frac{1}{4} \int_{\zeta_0 - \epsilon}^{\zeta_0 + \epsilon} (V(\zeta) - E) \psi_n(\zeta) d\zeta \quad . \quad (\text{E.65})$$

Da $V(\zeta)$ endlich ist, ist $\frac{d\psi_n}{d\zeta}$ entlang der Singularität stetig. Damit ist auch $\psi_n(\zeta)$ stetig. Daraus folgt für die beiden Potentiale, daß am singulären Punkt die Wellenfunktion und ihre Ableitung kontinuierlich ineinander übergehen. Aufgrund der Spiegelungsinvarianz des Potentials kann man Eigenfunktionen mit gerader und ungerader Parität konstruieren. Für die gerade Funktion von ζ gilt

$$\frac{d}{d\zeta} Z_n \left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} \kappa \right) = 0 \quad (\text{E.66})$$

und für die ungerade Funktion hat man

$$Z_n \left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} \kappa \right) = 0 \quad . \quad (\text{E.67})$$

Nach der Normierungsbedingung aus (E.62) ergibt sich für die Eigenfunktionen

$$\psi_n^\pm(\zeta) = \begin{cases} \sqrt[8]{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} Z_n \left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta - \kappa) \right) & (\zeta \geq 0) \\ \pm \sqrt[8]{\frac{2}{\lambda}} \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} Z_n \left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{2}} (\zeta + \kappa) \right) & (\zeta \leq 0) \end{cases} . \quad (\text{E.68})$$

Das positive Vorzeichen steht dabei für die Funktionen mit gerader Parität und das negative Vorzeichen für jene mit ungerader Parität.

Anhang F

Die fortran-Programme

Die Summen

```
SUBROUTINE SUMME1_SUB(N,ZETA,SUMME1)
    IMPLICIT NONE
C ----- Globale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION N,ZETA,SUMME1
C ----- Lokale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION I,UNTEN,EPSYLON
    EPSYLON=1D-10
    SUMME1=0D0
C ----- Singularitaetenbehandlung -----
    IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).LT.EPSYLON) THEN
        UNTEN=1.5D0
    ELSE
        UNTEN=0.5D0
    END IF
    DO I=UNTEN,N-0.5D0
        SUMME1=SUMME1+(I**2+ZETA**2)/(I**2-ZETA**2)**2
    END DO
    RETURN
END

SUBROUTINE SUMME2_SUB(ZETA,SUMME2)
    IMPLICIT NONE
C ----- Globale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION ZETA,SUMME2
C ----- Lokale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION M,UNTEN,EPSYLON
    EPSYLON=1D-10
    SUMME2=0D0
C ----- Singularitaetenbehandlung -----
    IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).LT.EPSYLON) THEN
        UNTEN=1.5D0
    ELSE
        UNTEN=0.5D0
    END IF
```

```

DO M=UNTEN,1000-0.5D0
  SUMME2=SUMME2+1/M/(M**2-ZETA**2)
END DO
  SUMME2=SUMME2*4

RETURN

END

SUBROUTINE SUMME3_SUB(M,ZETA,SUMME3)

  IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION M,ZETA,SUMME3

C ----- Lokale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION I,UNTEN,EPSYLON

  EPSYLON=1D-10
  SUMME3=0D0

C ----- Singularitaetenbehandlung -----
  IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).LT.EPSYLON) THEN
    UNTEN=1.5D0
  ELSE
    UNTEN=0.5D0
  END IF

  DO I=UNTEN,M-1D0
    SUMME3=SUMME3+(I**2+ZETA**2)/(I**2-ZETA**2)**2
  END DO

  RETURN

END

SUBROUTINE SUMME4_SUB(M,SUMME4)

  IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION M,SUMME4

C ----- Lokale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION I

  SUMME4=0D0

  DO I=1D0,M-0.5D0
    SUMME4=SUMME4+1/I**2
  END DO

  RETURN

END

SUBROUTINE SUMME5_SUB(ZETA,SUMME5)

  IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION ZETA,SUMME5

C ----- Lokale Variablen -----
  DOUBLE PRECISION N,UNTEN,EPSYLON

  EPSYLON=1D-10
  SUMME5=0D0

C ----- Singularitaetenbehandlung -----
  IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).LT.EPSYLON) THEN

```

```

        UNTEN=1.5D0
    ELSE
        UNTEN=0.5D0
    END IF

    DO N=UNTEN,1000-0.5D0
        SUMME5=SUMME5+1/N/(N**2-ZETA**2)
    END DO
    SUMME5=SUMME5*2

    RETURN

END

SUBROUTINE SUMME6_SUB(M,ZETA,SUMME6)

    IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION M,ZETA,SUMME6

C ----- Lokale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION I

    SUMME6=0D0

    DO I=M+1,1000
        SUMME6=SUMME6+I/(I**2-ZETA**2)**2
    END DO
    SUMME6=SUMME6*16

    RETURN

END

```

Die Matrixelemente

```

SUBROUTINE IN_SUB(M,G,N,ZETA,IN)

    IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION M,G,N,ZETA,IN

C ----- Lokale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION SUMME1,SUMME2

    CALL SUMME1_SUB(N,ZETA,SUMME1)
    CALL SUMME2_SUB(ZETA,SUMME2)

    IN=M**2+G**2*(16D0+16D0*N*SUMME1+ZETA**2*SUMME2)

    RETURN

END

SUBROUTINE JN_SUB(M,G,N,ZETA,JN)

    IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION M,G,N,ZETA,JN

C ----- Lokale Variablen -----
    DOUBLE PRECISION SUMME3,SUMME4,SUMME5,SUMME6,S,EPSYLON
    EPSILON=1D-10

    CALL SUMME3_SUB(N,ZETA,SUMME3)
    CALL SUMME4_SUB(N,SUMME4)
    CALL SUMME5_SUB(ZETA,SUMME5)
    CALL SUMME6_SUB(N,ZETA,SUMME6)

```

```

C ----- Singularitaetenbehandlung -----
      IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).LT.EPSYLON
&      .AND.(DABS(DABS(N)-0.5D0)).LT.EPSYLON ) THEN
        S=0D0
      ELSE
        S=4*(N+ZETA)/(N-ZETA)**2
      END IF

      JN=M**2+G**2*(16D0+8D0*(N+ZETA)*(SUMME3+SUMME4)+ZETA**2*SUMME5
&      +ZETA*(N+ZETA)*SUMME6+S)

      RETURN
    END

```

Die Matrix

```

      SUBROUTINE AABD_MATRIX(M,G,ZETA,K,MATRIXGROESSE,AABD)
C SUBROUTINE, welche die AABD-Matrix fuer vorgegebene M,G,ZETA (DP),
C MATRIXGROESSE (I), AABD(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE) (DP) berechnet.

      IMPLICIT NONE

C ----- Globale Variablen -----
      INTEGER K,MATRIXGROESSE
      DOUBLE PRECISION M,G,ZETA
      DOUBLE PRECISION AABD(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)

C ----- Lokale Variablen -----
      DOUBLE PRECISION N1,N2,IN1,IN2,JN1,JN2,S1,S2,S3,S4
      DOUBLE PRECISION SP,SQ,EPSYLON
      INTEGER P,Q

C ----- Initialisierung -----
      DO 10 P=1,MATRIXGROESSE
      DO 20 Q=1,MATRIXGROESSE
        AABD(P,Q)=0D0
      20 END DO
      10 END DO

C ----- AAAA-RAUM -----
      DO 30 P=1,K/2
        N1=DBLE(P)
        CALL IN_SUB(M,G,N1,ZETA,IN1)
        N2=DBLE(K-P)
        CALL IN_SUB(M,G,N2,ZETA,IN2)

        AABD(P,P)=IN1/N1+IN2/N2
      30 END DO

C ----- Singularitaetenbehandlung -----
      EPSYLON=1D-10
      IF((DABS(DABS(ZETA)-0.5D0)).GT.EPSYLON) THEN

C ----- keine Singularitaeten -----

C ----- BDAA- UND AABD-RAUM -----
      DO 40 P=1,K/2
      DO 50 Q=K/2+1,MATRIXGROESSE

        SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0
        S1=DSQRT((K-P)/(SQ+ZETA))
        S1=S1+1D0/S1

        S2=DSQRT(DBLE(P)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
        S2=S2+1D0/S2

        S3=DSQRT(DBLE(P)/(SQ+ZETA))
        S3=S3+1D0/S3

```

```

      S4=DSQRT(DBLE(K-P)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
      S4=S4+1D0/S4

      &      AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/( DBLE(K-P)-SQ+ZETA )**2
      &      -2D0*S3*S4*G**2/( DBLE(P)-SQ+ZETA )**2

      AABD(Q,P)=AABD(P,Q)

50  END DO
40  END DO

C ----- BDBD-RAUM -----

      DO 60 P=K/2+1,MATRIXGROESSE
          SP=DBLE(P-K/2)-0.5D0
          N1=SP
          CALL JN_SUB(M,G,N1,ZETA,JN1)

          N2=DBLE(K)-SP
          CALL JN_SUB(M,G,N2,-ZETA,JN2)

          AABD(P,P)=JN1/(SP+ZETA)+JN2/(DBLE(K)-SP-ZETA)

      DO 70 Q=P+1,MATRIXGROESSE
          SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0

          S1=DSQRT((SP+ZETA)/(SQ+ZETA))
          S1=S1+1D0/S1

          S2=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
          S2=S2+1D0/S2

          S3=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(SP+ZETA))
          S3=S3-1D0/S3

          S4=DSQRT((DBLE(K)-SQ-ZETA)/(SQ+ZETA))
          S4=S4-1D0/S4

          &      AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/(SP-SQ)**2
          &      +2D0*S3*S4*G**2/K**2

          AABD(Q,P)=AABD(P,Q)

70  END DO
60  END DO

      END IF

C ----- vorhandene Singularitaeten -----

C ----- ZETA = 0.5 -----

      IF(DABS(ZETA-0.5D0).LT.EPSYLON) THEN

C ----- BDAA- UND AABD-RAUM -----

      DO 140 P=1,K/2
      DO 150 Q=K/2+1,MATRIXGROESSE-1

          SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0
          S1=DSQRT((K-P)/(SQ+ZETA))
          S1=S1+1D0/S1

          S2=DSQRT(P/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
          S2=S2+1D0/S2

          S3=DSQRT(P/(SQ+ZETA))
          S3=S3+1D0/S3

          S4=DSQRT((K-P)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
          S4=S4+1D0/S4

          &      IF(DABS(DBLE(K-P)-SQ+ZETA).GT.EPSYLON.AND.
          &      DABS(DBLE(P)-SQ+ZETA).GT.EPSYLON) THEN

          &      AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/( DBLE(K-P)-SQ+ZETA )**2
          &      -2D0*S3*S4*G**2/( DBLE(P)-SQ+ZETA )**2

          END IF

          AABD(Q,P)=AABD(P,Q)

```



```

150  END DO
140  END DO

C ----- BDBD-RAUM -----

DO 160 P=K/2+1,MATRIXGROESSE-1
    SP=DBLE(P-K/2)-0.5D0
    N1=SP
    CALL JN_SUB(M,G,N1,ZETA,JN1)
    N2=DBLE(K)-SP
    CALL JN_SUB(M,G,N2,-ZETA,JN2)
    AABD(P,P)=JN1/(SP+ZETA)+JN2/(DBLE(K)-SP-ZETA)
DO 170 Q=P+1,MATRIXGROESSE-1
    SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0
    S1=DSQRT((SP+ZETA)/(SQ+ZETA))
    S1=S1+1D0/S1
    S2=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
    S2=S2+1D0/S2
    S3=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(SP+ZETA))
    S3=S3-1D0/S3
    S4=DSQRT((DBLE(K)-SQ-ZETA)/(SQ+ZETA))
    S4=S4-1D0/S4
    AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/(SP-SQ)**2
    & +2D0*S3*S4*G**2/K**2
    AABD(Q,P)=AABD(P,Q)
170  END DO
160  END DO
    N1=DBLE(K)-0.5D0
    CALL JN_SUB(M,G,N1,ZETA,JN1)
    AABD(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)=JN1/(N1+ZETA)
END IF

C ----- ZETA=-0.5 -----

IF(DABS(ZETA+0.5D0).LT.EPSYLON) THEN

C ----- BDAA- UND AABD-RAUM -----

DO 240 P=1,K/2
DO 250 Q=K/2+2,MATRIXGROESSE
    SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0
    S1=DSQRT((K-P)/(SQ+ZETA))
    S1=S1+1D0/S1
    S2=DSQRT(P/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
    S2=S2+1D0/S2
    S3=DSQRT(P/(SQ+ZETA))
    S3=S3+1D0/S3
    S4=DSQRT((K-P)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
    S4=S4+1D0/S4
    IF(DABS(DBLE(K-P)-SQ+ZETA).GT.EPSYLON.AND.
    & DABS(DBLE(P)-SQ+ZETA).GT.EPSYLON) THEN
    & AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/(DBLE(K-P)-SQ+ZETA)**2
    & -2D0*S3*S4*G**2/(DBLE(P)-SQ+ZETA)**2
    END IF
    AABD(Q,P)=AABD(P,Q)
250  END DO
240  END DO

C ----- BDBD-RAUM -----

N2=DBLE(K)-0.5D0
CALL JN_SUB(M,G,N2,-ZETA,JN2)

```

```

      AABD(K/2+1,K/2+1)=JN2/(DBLE(K)-0.5D0-ZETA)

DO 260 P=K/2+2,MATRIXGROESSE
      SP=DBLE(P-K/2)-0.5D0
      N1=SP
      CALL JN_SUB(M,G,N1,ZETA,JN1)

      N2=DBLE(K)-SP
      CALL JN_SUB(M,G,N2,-ZETA,JN2)

      AABD(P,P)=JN1/(SP+ZETA)+JN2/(DBLE(K)-SP-ZETA)

DO 270 Q=P+1,MATRIXGROESSE
      SQ=DBLE(Q-K/2)-0.5D0

      S1=DSQRT((SP+ZETA)/(SQ+ZETA))
      S1=S1+1D0/S1

      S2=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(DBLE(K)-SQ-ZETA))
      S2=S2+1D0/S2

      S3=DSQRT((DBLE(K)-SP-ZETA)/(SP+ZETA))
      S3=S3-1D0/S3

      S4=DSQRT((DBLE(K)-SQ-ZETA)/(SQ+ZETA))
      S4=S4-1D0/S4

      AABD(P,Q)=-2D0*S1*S2*G**2/(SP-SQ)**2
&      +2D0*S3*S4*G**2/K**2

      AABD(Q,P)=AABD(P,Q)

270  END DO
260  END DO

END IF

```

Berechnen der Eigenwerte

Die doppelte Ozillatorbasis

```

PROGRAM MATRIX_EXP

IMPLICIT NONE

C ----- aabd_matrix_sub -----

INTEGER K,MATRIXGROESSE
PARAMETER(K=91,MATRIXGROESSE=K+K/2)
DOUBLE PRECISION M,G,H,LA
PARAMETER(M=0D0,G=1D0,H=0.265D0,LA=378480.9609D0)
DOUBLE PRECISION ZETA
DOUBLE PRECISION AABD(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)

C ----- int_spline -----

INTEGER NSPL
PARAMETER(NSPL=200)
DOUBLE PRECISION X(NSPL),F(NSPL)
DOUBLE PRECISION BU,B0,DINT

C ----- jacobi_ew -----

DOUBLE PRECISION MATRIX(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)
DOUBLE PRECISION LAMBDA(MATRIXGROESSE)

C ----- vektord_sub2 -----

DOUBLE PRECISION LAMBDA_ORD(MATRIXGROESSE)

C ----- Automatische Datenausgabe -----

CHARACTER*1 CHI1
CHARACTER*2 CHI2
CHARACTER*3 CHI3

```

```

CHARACTER*19 QFILE1
CHARACTER*11 QF

C ----- Allgemein -----

DOUBLE PRECISION MATRIX1(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE,NSPL)
DOUBLE PRECISION Pi
INTEGER P,Q,I,JQ,QS,JQ1,QS1

C ----- Files -----

QF="EIGENWEXPO_"

JQ=K

IF(JQ.LE.9) THEN
  CHI1=CHAR(JQ+48)
  QFILE1=QF//CHI1//".DATA"
END IF

IF(JQ.GT.9) THEN
  QS=JQ/10
  CHI2=CHAR(QS+48)//CHAR(JQ-QS*10+48)
  QFILE1=QF//CHI2//".DATA"
END IF

IF(JQ.GT.99) THEN
  QS1=JQ/100
  JQ1=JQ-QS1*100
  QS=JQ1/10
  CHI3=CHAR(QS1+48)//CHAR(QS+48)//CHAR(JQ1-QS*10+48)
  QFILE1=QF//CHI3//".DATA"
END IF

OPEN(30,FILE=QFILE1,STATUS="UNKNOWN",FORM="FORMATTED")

C ----- Allgemein -----

Pi=4*DATAN(1D0)
BU=-0.5D0
BO=0.5D0

C ----- Punkte-Netz -----

DO 10 I=1,NSPL
  X(I)=BU+(BO-BU)*(I-1)/(NSPL-1)

10  END DO

C ----- Hilfs-Matrix -----

DO 20 I=1,NSPL
  ZETA=X(I)

  CALL AABD_MATRIX(M,G,ZETA,K,MATRIXGROESSE,AABD)

  DO 30 P=1,MATRIXGROESSE
  DO 40 Q=1,MATRIXGROESSE

    IF(ZETA.GE.0) THEN
      MATRIX1(P,Q,I)=2*AABD(P,Q)*(8*Pi**2/LA)**0.25D0
&      *DEXP(-DSQRT(LA/2)*(X(I)-H)**2/2)
    ELSE
      MATRIX1(P,Q,I)=2*AABD(P,Q)*(8*Pi**2/LA)**0.25D0
&      *DEXP(-DSQRT(LA/2)*(X(I)+H)**2/2)
    END IF

  40  END DO
  30  END DO
  20  END DO

C ----- Integration der Hilfs-Matrix -----

DO 50 P=1,MATRIXGROESSE
DO 60 Q=1,MATRIXGROESSE

  DO 70 I=1,NSPL
    F(I)=MATRIX1(P,Q,I)
  70  END DO

  CALL INT_SPLINE(NSPL,BU,BO,X,F,DINT)

```

```

        MATRIX(P,Q)=DINT
        MATRIX(Q,P)=MATRIX(P,Q)

60    END DO
50    END DO

C ----- Eigenwerte der Matrix -----

        CALL JACOBI_EW(MATRIXGROESSE,MATRIX,LAMBDA)

        DO P=1,MATRIXGROESSE
            print*,P,LAMBDA(P)*K
        END DO

C ----- Ordnen der Eigenwerte nach der Groesse -----

        CALL VEKTORD2(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE,1,LAMBDA,LAMBDA_ORD)

        DO P=1,MATRIXGROESSE
            print*,P,LAMBDA_ORD(P)*K
            WRITE(30,'(I4,F16.10)') ,K,LAMBDA_ORD(P)*K
        END DO

        END

```

Die Kastenpotentialbasis

```

PROGRAM MATRIX_SIN

        IMPLICIT NONE

C ----- aabd_matrix_sub -----

        INTEGER ANZAHL_SINUS,K,MATRIXGROESSE
        PARAMETER(ANZAHL_SINUS=1,K=91,MATRIXGROESSE=ANZAHL_SINUS*(K+K/2))
        DOUBLE PRECISION M,G
        PARAMETER(M=0D0,G=1D0)
        DOUBLE PRECISION ZETA
        DOUBLE PRECISION AABD(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)

C ----- int_spline -----

        INTEGER NSPL
        PARAMETER(NSPL=200)
        DOUBLE PRECISION X(NSPL),F(NSPL)
        DOUBLE PRECISION BU,BO,DINT

C ----- jacobi_ew -----

        DOUBLE PRECISION MATRIX(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE)
        DOUBLE PRECISION LAMBDA(MATRIXGROESSE)

C ----- vektord_sub2 -----

        DOUBLE PRECISION LAMBDA_ORD(MATRIXGROESSE)

C ----- Automatische Datenausgabe -----

        CHARACTER*1 CHI1
        CHARACTER*2 CHI2
        CHARACTER*3 CHI3
        CHARACTER*19 QFILE1
        CHARACTER*11 QF

C ----- Allgemein -----

        DOUBLE PRECISION MATRIX1(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE,NSPL)
        DOUBLE PRECISION Pi
        INTEGER P,Q,I,JQ,JQS,JQ1,JQS1

C ----- Files -----

        QF="EIGENWERTE_"

        JQ=K

        IF(JQ.LE.9) THEN
            CHI1=CHAR(JQ+48)
            QFILE1=QF//CHI1//".DATA"

```

```

      END IF

      IF(JQ.GT.9) THEN
        JQS=JQ/10
        CHI2=CHAR(JQS+48)//CHAR(JQ-JQS*10+48)
        QFILE1=QF//CHI2//".DATA"
      END IF

      IF(JQ.GT.99) THEN
        JQS1=JQ/100
        JQ1=JQ-JQS1*100
        JQS=JQ1/10
        CHI3=CHAR(JQS1+48)//CHAR(JQS+48)//CHAR(JQ1-JQS*10+48)
        QFILE1=QF//CHI3//".DATA"
      END IF

      OPEN(30,FILE=QFILE1,STATUS="UNKNOWN",FORM="FORMATTED")

C ----- Allgemein -----
      Pi=4D0*DATAN(1D0)
      BU=-0.5D0
      BO=0.5D0

C ----- Punkte-Netz -----
      DO 10 I=1,NSPL
        X(I)=BU+(BO-BU)*(I-1)/(NSPL-1)
10    END DO

C ----- Hilfs-Matrix -----
      DO 20 I=1,NSPL
        ZETA=X(I)

        CALL AABD_MATRIX(M,G,ZETA,K,MATRIXGROESSE,AABD)

      DO 30 P=1,MATRIXGROESSE
      DO 40 Q=1,MATRIXGROESSE
        MATRIX1(P,Q,I)=4*AABD(P,Q)*DSIN(Pi*(X(I)+0.5D0))*2
40    END DO
30    END DO
20    END DO

C ----- Integration der Hilfs-Matrix -----
      DO 50 P=1,MATRIXGROESSE
      DO 60 Q=P,MATRIXGROESSE

      DO 70 I=1,NSPL
        F(I)=MATRIX1(P,Q,I)
70    END DO

        CALL INT_SPLINE(NSPL,BU,BO,X,F,DINT)

        MATRIX(P,Q)=DINT
        MATRIX(Q,P)=MATRIX(P,Q)

60    END DO
50    END DO

C ----- Eigenwerte der Matrix -----
      CALL JACOBI_EW(MATRIXGROESSE,MATRIX,LAMBDA)

      DO P=1,MATRIXGROESSE
        print*,P,LAMBDA(P)*K
      END DO

C ----- Ordnung der Eigenwerte nach der Groesse -----
      CALL VEKTORD2(MATRIXGROESSE,MATRIXGROESSE,1,LAMBDA,LAMBDA_ORD)

      DO P=1,MATRIXGROESSE
        print*,P,LAMBDA_ORD(P)*K
        WRITE(30,'(I4,F16.10)',K,LAMBDA_ORD(P)*K
      END DO

      END

```


Literaturverzeichnis

- [1] E80 COLLABORATION (M.J. ALGUARD ET AL.), *Deep Inelastic Scattering of Polarized Electrons by Polarized Protons*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1261; *Elastic Scattering of Polarized Electrons by Polarized Protons*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1258; *Deep Inelastic $e p$ Asymmetry Measurement and Comparison with the Bjørken Sum Rule and Models of Proton Spin Structure*, Phys. Rev. Lett. **41** (1978) 70.
- [2] E130 COLLABORATION (G. BAUM ET AL.), *A New Measurement of Deep Inelastic $e p$ Asymmetries*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1135; *Measurement of Asymmetry in Spin Dependent $e p$ Resonance Region Scattering*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 2000.
- [3] E143 COLLABORATION (K. ABE ET AL.), *Measurement of the Proton and Deuteron Spin Structure Functions g_1 and g_2* , Phys. Rev. **D58** (1998) 112003.
- [4] E155 COLLABORATION (P.L. ANTONY ET AL.), *Measurement of the Q^2 -Dependence of the Proton and Neutron Spin Structure Functions g_1^p and g_1^n* , Phys. Lett. **B493** (2000) 19.
- [5] EUROPEAN MUON COLLABORATION (J. ASHMAN ET AL.), *A Measurement of the Spin Asymmetry and Determination of the Structure Function g_1 in Deep Inelastic Muon - Proton Scattering*, Phys. Lett. **B206** (1988) 364; *An Investigation of the Spin Structure of the Proton in Deep Inelastic Scattering of Polarized Muons on Polarized Protons*, Nucl. Phys. **B328** (1989) 1.
- [6] SPIN MUON COLLABORATION (D. ADEVA ET AL.), *Spin Asymmetries A_1 and Structure Functions g_1 of the Proton and Deuteron from Polarized High Energy Muon Scattering*, Phys. Rev. **D58** (1998) 112001.
- [7] HERMES COLLABORATION (A. AIRAPETIAN ET AL.), *Measurement of the Proton Spin Structure Function $g_1(p)$ with a Pure Hydrogen Target*, Phys. Lett. **B442** (1998) 484.

- [8] HERMES COLLABORATION (U. STOSSLEIN ET AL.), *Measurements of the Spin Structure Function g_1 of the Proton and the Deuteron*, Osaka 2000, Spin Physics (2000) 387.
- [9] HERMES COLLABORATION (A. AIRAPETIAN ET AL.), *The Q^2 Dependence of the Generalized Gerasimov-Drell-Hearn Integral for the Proton*, Phys. Lett. **B494** (2000) 1.
- [10] M. ANSELMINO, A. EFREMOV, AND E. LEADER, *The Theory and Phenomenology of Polarized Deep Inelastic Scattering*, Phys. Rep. **216** (1995) 9-11; 55-63.
- [11] H.-Y. CHENG, *Status of the Proton Spin Problem*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 5109; *The Proton Spin Puzzle: A Status Report*, Chin. J. Phys. Vol. **38**, No. 4 (2000) 753.
- [12] R.P. FEYNMAN, *Photon-Hadron Interactions*, W.A. Benjamin, Inc., New York (1972).
- [13] F.E. CLOSE, *The Quark Parton Model*, Rep. Prog. Phys. **42** (1979) 1285.
- [14] M. GELL-MANN, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [15] G. ZWEIG, *An $SU(3)$ Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, CERN Preprints Th. **401** (1964).
- [16] M. GELL-MANN, Y. NE'EMAN, *The Eightfold Way*, W.A. Benjamin, Inc., New York (1964).
- [17] J.J.J. KOKKEDEE, *The Quark Model*, W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam (1969).
- [18] J.F. DONOGHUE, E. GOLOWICH, B.R. HOLSTEIN, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. 2, Massachusetts U., Amherst (1992) 280-302.
- [19] K.G. WILSON, *Non Lagrangian Model's of Current Algebra*, Phys. Rev. **179** (1969) 1499; *Operator Product Expansions and Anomalous Dimensions in the Thirring Model*, Phys. Rev. **D2** (1970) 1473.
- [20] J. ELLIS, R.L. JAFFE, *A Sum Rule for Deep Inelastic Electroproduction From Polarized Protons*, Phys. Rev. **D9** (1974) 1444; Erratum **D10** (1974) 1669.

- [21] A.V. EFREMOV, O.V. TERYAEV, *Spin Structure of the Nucleon and Triangle Anomaly*, Czech. Hadron Symp. (1988) 302, Preprint JINR-E2-88-287 (1988).
- [22] G. ALTARELLI, G.G. ROSS, *The Anomalous Gluon Contribution to Polarized Leptonproduction*, Phys. Lett. **B212** (1988) 391.
- [23] R.D. CARLITZ, J.C. COLLINS, AND A.H. MUELLER, *The Role of the Axial Anomaly in Measuring Spin Dependent Parton Distributions*, Phys. Lett. **B214** (1988) 229.
- [24] E. LEADER, M. ANSELMINO, *Understanding the Polarized EMC Experiment: The End of the Parton Spin Crisis*, Preprint NSF-ITP-88 (1988).
- [25] R.L. JAFFE, A. MANOHAR, *The g_1 Problem: Fact and Fantasy on the Spin of the Proton*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 509.
- [26] B. GEYER, M. LAZAR, AND D. ROBASCHIK, *Nonlocal Operators and Distribution Amplitudes of Definite Twist, WW-Relations, BC-Sum Rules and Power Corrections for Hard QCD Processes*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108** (2002) 318.
- [27] I. HALPERIN, A. ZHITNITSKY, *Polarized Intrinsic Charm as a Possible Solution to the Proton Spin Problem*, hep-ph/9706251.
- [28] G.M. SHORE, *The Proton-Spin Crisis: another ABJ Anomaly ?*, International School of Subnuclear Physics, 'From the Planck Length to the Hubble Radius', Erice (1998).
- [29] G.M. SHORE, *$U_A(1)$ Problems and Gluon Topology - Anomalous Symmetry in QCD*, The 1998 Zuoz Summer School on 'Hidden Symmetries and Higgs Phenomena' (1998).
- [30] S. NARISON, G.M. SHORE, AND G. VENEZIANO, *Topological Charge Screening and the 'Proton Spin' beyond the Chiral Limit*, Nucl. Phys. **B546** (1999) 135.
- [31] I. HALPERIN, A. ZHITNITSKY, *On Topological Susceptibility, Vacuum Energy and Θ Dependence in Gluodynamics*, Mod. Phys. Lett. **A13** (1998) 1955.
- [32] J.E. MANDULA, M.C. OGILVIE, *A New Technique for Measuring the Strangeness Content of the Proton on the Lattice*, Phys. Lett. **B312** (1993) 327.
- [33] S.J. DONG, J.-F. LAGAE, AND K.F. LIU, *Flavor Singlet $g(a)$ from Lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2096.

- [34] M. FUKUGITA, Y. KURAMASHI, M. OKAWA, AND A. UKAWA, *Proton Spin Structure from Lattice QCD*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2092.
- [35] M. GÖCKELER, R. HORSLEY, E.M. ILGENFRITZ, H. PERLT, P. RAKOW, G. SCHIERHOLZ, AND A. SCHILLER, *Polarized and Unpolarized Nucleon Structure Functions from Lattice QCD*, Phys. Rev. **D53** (1996) 2317.
- [36] A. ACTOR, *Classical Solutions of $SU(2)$ Yang–Mills Theories*, Rev. Mod. Phys., Vol. 51, No. 3 (1979) 496.
- [37] T.C. KRAAN, P. VAN BAAL, *Monopole Constituents inside $SU(N)$ Calorons*, Phys. Lett. **B435** (1998); *Periodic Instantons with Non-trivial Holonomy*, Nucl. Phys. **B533** (1998); *Exact T-Duality between Calorons and Taub-NUT Spaces*, Phys. Lett. **B428** (1998).
- [38] C. GATTRINGER, *Calorons, Instantons and Constituent Monopoles in $SU(3)$ Lattice Gauge Theory*, hep-lat/0210001.
- [39] G. 'T HOOFT, *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8; *Computation of the Quantum Effects due to a four-dimensional Pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432.
- [40] T. SCHÄFER, E. SHURYAK, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 323.
- [41] E. SHURYAK, I. ZAHED, *Instanton-induced Effects in QCD High-Energy Scattering*, Phys.Rev. **D62** (2000) 085014.
- [42] H.C. PAULI, *On a Numerical Exact Solution to the Many-Body Problem in One Dimension*, Z. Phys. **A319** (1984) 303.
- [43] H.C. PAULI, S.J. BRODSKY, *Solving Field Theory in One Space and One Time Dimension*, Phys. Rev. **D32** (1985) 1993; *Discretized Light-Cone Quantization: Solution to a Field Theory in One Space and One Time Dimension*, Phys. Rev. **D32** (1985) 2001.
- [44] TH. ELLER, H.C. PAULI, S.J. BRODSKY, *Discretized Light-Cone Quantization: The Massless and the Massive Schwinger Model*, Phys. Rev. **D35** (1987) 1493.
- [45] TH. ELLER, H.C. PAULI, *Quantizing QED_{1+1} on the Light-Cone*, Z. Phys. **C42** (1989) 59.

- [46] K. HORNBOSTEL, *The Application of Light-Cone Quantization to Quantum Chromodynamics in (1+1) Dimensions*, PhD-Thesis, Stanford Linear Accelerator Center 1988.
- [47] K. HORNBOSTEL, S.J. BRODSKY, H.C. PAULI, *Light-Cone-Quantized QCD in (1+1) Dimensions*, Phys. Rev. **D41** (1990) 3814.
- [48] M. KRAUTGÄRTNER, H.C. PAULI, F. WÖLZ, *Positronium and Heavy Quarkonia as Testing Case for DLCQ*, Phys. Rev. **D45** (1992) 3755.
- [49] M. KRAUTGÄRTNER, *Anwendung der DLCQ auf die QED*, Dissertation (unpublished), Heidelberg 1992.
- [50] U. TRITTMANN, *Quantum Electrodynamics at Strong Couplings*, Dissertation, Universität Heidelberg (1996) hep-th/9704215.
- [51] P.A.M. DIRAC, *Forms of Relativistic Dynamics*, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 392.
- [52] T. HEINZL, S. KRUSCHE, S. SIMBURGER, E. WERNER, *Nonperturbative Light Cone Quantum Field Theory beyond the Tree Level*, Z. Phys. **C56** (1992) 415.
- [53] C.M. BENDER, S.S. PINSKY, B. VAN DE SANDE, *Spontaneous Symmetry Breaking of (1+1)-Dimensional Φ^4 -Theory in Light-Front Field Theory I*, Phys. Rev. **D48** (1993) 816; S.S. PINSKY, B. VAN DE SANDE, *Spontaneous Symmetry Breaking of (1+1)-Dimensional Φ^4 -Theory in Light-Front Field Theory II*, Phys. Rev. **D49** (1994) 2001.
- [54] R.A. BRANDT, G. PREPARATA, *Operator Product Expansion near the Light Cone*, Nucl. Phys. **B27** (1972) 541.
- [55] B. LAMPE, E. REYA, *Polarized Structure Functions and High Energy Polarized Scattering*, MPI-PhT/96-14 (1996) 4,5; 30-35.
- [56] D.H. PERKINS, *Wellenoptische Behandlung der Hadron-Streuung*, in Hochenergiephysik, Addison-Wesley, Bonn, München; Reading, Massachusetts (u.a.) (1990) 134-137.
- [57] S. POKORSKI, *Gauge Field Theories*, 2nd Ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2000) 250-254.
- [58] W. ZIMMERMANN, *Composite Operators in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions*, Annals Phys. **77** (1973) 536, Lect. Notes Phys. (2000) 244; *Normal*

- Products and the Short Distance Expansion in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions*, Annals Phys. **77** (1973) 570, Lect. Notes Phys. **558** (2000) 278.
- [59] S.A. LARIN, *The next-to-leading QCD Approximation to the Ellis-Jaffe Sum Rule*, Phys. Lett. **B334** (1994) 192.
 - [60] T. APPELQUIST, J. CARAZZONE, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. **D11** (1975) 2865.
 - [61] F. J. YNDURÁIN, *Wigner-Weyl and Nambu-Goldstone Realizations of Symmetries*, in *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Third Revised and Enlarged Edition (1999) 270 pp.
 - [62] G. 'T HOOFT, *Naturalness, Chiral Symmetry, and Spontaneous Chiral Symmetry Breaking*, in *Under the Spell of the Gauge Principle*, Advanced Series in Mathematical Physics Vol. 19, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1994) 352-374.
 - [63] PARTICLE DATA GROUP, D.E. GROOM ET AL., Eur. Phys. J. **C15** (2000) 1.
 - [64] P.G. RATCLIFFE, *$SU(3)$ Breaking Effects in Hyperon Semi-Leptonic Decays and the Extraction of D and F* , Phys.Lett. **B365** (1996) 383.
 - [65] X. SONG, P.K. KABIR, AND J.S. MCCARTHY, *F/D Ratio in Hyperon Beta Decays and Spin Distribution in the Nucleon*, Phys. Rev. **D54** (1996) 2180.
 - [66] P.G. RATCLIFFE, *Hyperon Beta-Decay Analysis and the Recent KTeV Data*, 14th International Spin Physics Symposium (SPIN 2000), Osaka (2000), hep-ph/0012133.
 - [67] F.E. CLOSE, R.G. ROBERTS, *Consistent Analysis of the Spin Content of the Nucleon*, Phys. Lett. **B316** (1993) 165.
 - [68] B. EHRSPEGER, A. SCHÄFER, *Reanalysis of Hyperon Beta Decay Data on F/D* , Phys. Lett. **B348** (1995) 619.
 - [69] C. ITZYKSON, J.-B. ZUBER, *Integral Equations and Bound-State Problems*, in *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill International Editions, Singapore (1985) 475-508.
 - [70] S.L. ADLER, *Axial Vector Vertex in Spinor Electrodynamics*, Phys. Rev. **177** (1969) 2426.

- [71] J.S. BELL, R. JACKIW, *A PCAC Puzzle: $\pi_0 \rightarrow \gamma$ in the σ -model*, Nuovo Cim. **A60** (1969) 47.
- [72] A.D. DOLGOV, V.I. ZAKHAROV, *On Conservation of Axial Current in Massless Electrodynamics*, Yad. Fiz. **13** (1971) 608.
- [73] P. LANGACKER, H. PAGELS, *Chiral Perturbation Theory*, Phys. Rev. **D8** (1973) 4595.
- [74] P. LANGACKER, H. PAGELS, *Applications of Chiral Perturbation Theory: Mass Formulas and the Decay $\eta \rightarrow 3\pi$* , Phys. Rev. **D10** (1974) 2904.
- [75] H. PAGELS, *Departures from Chiral Perturbation Theory; a Review*, Phys. Rep. **C16** (1975) 219.
- [76] J. GASSER, H. LEUTWYLER, *Chiral Perturbation Theory to One Loop*, Annals Phys. **158** (1984) 142.
- [77] K. FUJIKAWA, *Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195.
- [78] K. FUJIKAWA, *Path Integral for Gauge Theories with Fermions*, Phys. Rev. **D21** (1980) 2848.
- [79] R. JACKIW, C. REBBI, *Conformal Properties of a Yang-Mills Pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976) 517.
- [80] R. JACKIW, C. REBBI, *Spinor Analysis of Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. **D16** (1977) 1052.
- [81] N.K. NIELSEN, B. SCHROER, *Axial Anomaly and Atiyah-Singer Theorem*, Nucl. Phys. **B127** (1977) 493.
- [82] N.K. NIELSEN, H. RÖMER, B. SCHROER, *Classical Anomalies and Local Version of the Atiyah-Singer Theorem*, Phys. Lett. **B70** (1977) 445.
- [83] R. STORA, *Algebraic Structure of Chiral Anomalies*, New Perspectives in Quantum Field Theory, Cargèse Lectures, H. Lehmann (ed.), NATO ASI series, Plenum Press, New York (1983).
- [84] B. ZUMINO, *Chiral Anomalies and Differential Geometry*, in Relativity, Groups and Topology II, Les Houches Lectures, B.S. DeWitt and R. Stora (eds.) (1983) 1291.

- [85] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER, *Dirac Operators Coupled to Vector Potentials*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **81** (1984) 2597.
- [86] G. ALTARELLI, G. PARISI, *Asymptotic Freedom in Parton Language*, Nucl. Phys. **B126** (1960) 298.
- [87] B. BADELEK, J. KIRYLUK , AND J. KWIECINSKI, *Spin Dependent Structure Function g_1 at low x and low Q^2* , Liverpool 2000, Deep Inelastic Scattering (2000) 208.
- [88] S. OKUBO, *Phi Meson and Unitary Symmetry Model*, Phys. Lett. **5** (1963) 165.
- [89] G. ZWEIG, *An $SU(3)$ Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, CERN Preprints Th. **401** and **412** (1964).
- [90] J. IZUKA, K. OKADA, AND D. SHITO, *Systematics and Phenomenology of Boson Mass Levels*, Progr. Theor. Phys. **35** (1966) 1061.
- [91] CLEO COLLABORATION (B.H. BEHRENS ET AL.), *Two Body B Meson Decays to η and η' Observation of $B \rightarrow \eta' K$* , Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3710.
- [92] R.P. FEYNMAN, *Space-Time Approach to Nonrelativistic Electrodynamics*, Rev. Mod. Phys. **20** (1948), 367.
- [93] L.D. FADDEEV, V.N. POPOV, *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*, Phys. Lett. **B25** (1967) 29.
- [94] G. 'T HOOFT, *Extended Objects in Gauge Field Theories*, Particles and Fields, eds. D.H. Boal and A.N. Kamal, Plenum, New York (1978) 165.
- [95] G. 'T HOOFT, *How Instantons solve the $U(1)$ Problem*, Phys. Rep. **142**, No. 6 (1986) 357.
- [96] R. BOTT, *An Application of Morse Theory to the Topology of Lie Groups*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956) 251.
- [97] R. RADJARAMAN, *Solitons and Instantons*, North-Holland (1982) 86-98.
- [98] A.M. POLYAKOV, *Quark Confinement and Topology of Gauge Groups*, Nucl. Phys. **B120** (1977) 429.
- [99] A. BELAVIN, A. POLYAKOV, A. SCHVARTS, AND Y. TYUPKIN, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys. Lett. **B59** (1975) 85.
- [100] V.N. GRIBOV, *A Theory of the Heavy Pomeron*, Nucl. Phys. **B106** (1976) 189.

- [101] C.G. CALLAN, R. DASHEN, D.J. GROSS, *The Structure of the Gauge Theory Vacuum*, Phys. Lett. **B63** (1976) 334.
- [102] M.C. CHU, J.M. GRANDY, S. HUANG, J.W. NEGELE, *Correlation Functions of Hadron Currents in the QCD Vacuum Calculated in Lattice QCD*, Phys. Rev. **D48** (1993) 3340.
- [103] D.I. DIAKONOV, *Chiral Symmetry Breaking by Instantons*, International School of Physics, Enrico Fermi, Course 80, Varenna, Italy (1995), hep-ph/9602375.
- [104] H. FRITZSCH, P. MINKOWSKI, *Ψ -Resonances, Gluons and the Zweig Rule*, Nuovo Cim. Vol. **30A**, No. 3 (1975) 393.
- [105] H. FRITZSCH, J. D. JACKSON, *Mixing of Pseudoscalar Mesons and $M1$ Radiative Decays*, Phys. Lett. Vol. **66B**, No. 4 (1977) 365.
- [106] F.J. GILMAN, R. KAUFFMAN, *The $\eta - \eta'$ Mixing Angle*, Phys. Rev. **D36** (1987), 2761.
- [107] H.F. JONES, M.D. SCADRON, *Gluon Effects and Nonet Mixing in the Current Quark Picture*, Nucl. Phys. **B155** (1979) 409.
- [108] P. BALL, J.-M. FRÈRE, AND M. TYTGAT, *Phenomenological Evidence for the Gluon Content of η and η'* , Phys. Lett. **B365** (1996) 367.
- [109] H. LEUTWYLER, *Bounds on the Light Quark Masses*, Phys. Lett. **B374** (1996) 163; *Implications of $\eta\eta'$ Mixing for the decay $\eta \rightarrow 3\pi^*$* , Phys. Lett. **B374** (1996) 181.
- [110] E.P. VENUGOPAL, B.R. HOLSTEIN, *Chiral Anomaly and $\eta - \eta'$ Mixing*, Phys. Rev. **D57** (1998) 4397.
- [111] H. LEUTWYLER, R. KAISER, *Pseudoscalar Decay Constants at Large N_C* , hep-ph/9806336.
- [112] TH. FELDMANN, P. KROLL, AND B. STECH, *Mixing and Decay Constants of Pseudoscalar Mesons*, Phys. Rev. **D58** (1998) 114006.
- [113] R. ESCRIBANO, J.-M. FRÈRE, *Phenomenological Evidence for the Energy Dependence of the $\eta - \eta'$ Mixing Angle*, Phys. Lett. **B459** (1999) 288.
- [114] D. DIAKONOV, V. PETROV, AND P. POBYLITSA, *The Wilson Loop and Heavy Quark Potential in the Instanton Vacuum*, Phys. Lett. **B226** (1989) 372.

- [115] C.G. CALLAN, R. DASHEN, D.J. GROSS, *A Mechanism for Quark Confinement*, Phys. Lett. **B66** (1977) 375; *Toward a Theory of the Strong Interactions*, Phys. Rev. **D17** (1978) 2717; *The structure of Hadrons in QCD*, Phys. Lett. **B78** (1978) 307.
- [116] A. POLYAKOV, *Gauge Fields as Rings of Glue*, Nucl. Phys. **B164** (1980) 171.
- [117] L. DOLAN, *The Beacon of Kac-Moody Symmetry for Physics*, Notices of the AMS (1995) 1489.
- [118] H. FRITZSCH, M. GELL-MANN, *Current Algebra: Quarks and What Else ?*, in J.D. Jackson and A. Roberts (Eds.), Proceedings of the XVI. International Conference on High Energy Physics, Vol. 2, Batavia III (1972).
- [119] S.J. BRODSKY, G.MCCATOR, H.C. PAULI, S.S. PINSKY, *The Challenge of Light-Cone Quantization of Gauge-Field Theories*, Particle World Vol.3, No.3 (1993) 109-124.
- [120] S.J. BRODSKY, D.G ROBERTSON, *Light-Cone Quantization and QCD Phenomenology*, Proceedings of the “ELFE Summer School and Workshop on Confinement Physics”, Cambridge, England, 22-28 July (1995), hep-th/9511374.
- [121] S.J. BRODSKY, H.C. PAULI, *Light-Cone Quantization of Quantum Chromodynamics*, Lect. Notes Phys. Vol. 396, Springer Verlag Berlin, Heidelberg (1991) 51.
- [122] S. DALLEY, I. R. KLEBANOV, *String Spectrum of (1+1)-Dimensional Large-N QCD with Adjoint Matter*, Phys. Rev. **D47** (1993) 2517.
- [123] G. BHANOT, K. DEMETERFI, I. R. KLEBANOV, *(1+1)-Dimensional Large-N QCD Coupled to Adjoint Fermions*, Phys. Rev. **D48** (1993) 4980.
- [124] K. DEMETERFI, I. R. KLEBANOV, G. BHANOT, *Glueball Spectrum in a (1+1)-Dimensional Model for QCD*, Nucl. Phys. **B418** (1994) 15.
- [125] P.A.M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science Monograph Series, New York (1964).
- [126] N.N. BOGOLUBOV, A.A. LONGUNOV, I.T. TODOROV, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, W.A. Benjamin, INC. Advanced Book Program, Reading, Massachusetts (1975) 109-111, 143-167.
- [127] H.J. MELOSH, *Quarks: Currents and Constituents*, Phys. Rev. **D9** (1974) 1095.

- [128] M.F. ATIYAH, *Instantons in Two-Dimensions and Four-Dimensions*, Comm. Math. Phys. **93** (1984) 437.
- [129] T. KUGO, *Eichtheorie*, Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1997) 142.
- [130] A. MANOHAR, *Parton Distributions from an Operator Viewpoint*, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 2511.
- [131] I.I. BALITSKY, V.M. BRAUN, *Topological Current $K(\mu)$ as a String Operator*, Phys. Lett. **B267** (1991) 405.
- [132] A. SAALFELD, G. PILLER, AND L. MANKIEWICZ, *Gluon Polarization in Nucleons*, Eur. Phys. J. **C4** (1998) 307.
- [133] J.D. BJØKEN, *Lepton-Nucleon Scattering and Quantum Chromodynamics*, Birkhäuser (1982).
- [134] P. v. BAAL, *Gauge Theories in Finite Volumes Revisited*, Nucl. Phys. **B351** (1991) 183.
- [135] M. LÜSCHER, *Some Analytic Results Concerning the Mass Spectrum of Yang-Mills Gauge Theories on a Torus*, Nucl. Phys. **B219** (1983) 233.
- [136] W. SIEGEL, *Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction*, Phys. Lett. **B84** (1979) 193.
- [137] W. SIEGEL, *Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization*, Phys. Lett. **B94** (1980) 37.
- [138] G. 'T HOOFT, *A Two-Dimensional Model for Mesons*, Nucl. Phys. **B75** (1974) 461.
- [139] V.A. FRANKE, Y. A. NOVOZHILOV, AND E.V. PROKHAVILOV, *On the Light Cone Quantization of Nonabelian Gauge Theory*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 437; *Light-Cone Quantization of Gauge Theories with Periodic Boundary Conditions, Dynamical Systems and Microphysics*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 239.
- [140] H.-C. PAULI, A.C. KALLONIATIS, S.S. PINSKY, *Towards Solving QCD - The Transverse Zero Modes in Light-Cone Quantization*, Phys. Rev. **D52** (1995) 1176.
- [141] N.S. MANTON, *The Schwinger Model and its Axial Anomaly*, Annals Phys. **159** (1985) 220.
- [142] A.S. MÜLLER, *Über die Kopplung von Eich– und Fockraum–Moden in einer nicht-abelschen $SU(2)$ –Theorie*, Diplomarbeit (1996).

- [143] N.N. GRIBOV, *Quantization of Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.
- [144] P. v. BAAL, *More (thoughts on) Gribov Copies*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 259.
- [145] A.C. KALLONIATIS, H.-C. PAULI, *Bosonic Zero Modes and Gauge Theory in Discrete Light-Cone Quantization*, Z. Phys. **C60** (1993) 255.
- [146] A.C. KALLONIATIS, *On Zero Modes and the Vacuum Problem - A Study of Scalar Adjoint Matter in Two-Dimensional Yang-Mills Theory via Light-Cone Quantization*, Phys. Rev. **D54** (1996) 2876.
- [147] F. LENZ, H.W.L. NAUS, M. THIES, *QCD in Axial Gauge Representation*, Annals Phys. **233** (1994) 317.
- [148] J.E. HETRICK, *Gauge Fixing and Gribov Copies in Pure Yang-Mills on a Circle*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **30** (1993) 228.
- [149] A.S. MÜLLER, A.C. KALLONIATIS, H.-C. PAULI, *Effects of Zero Modes on the Bound-State Spectrum in Light-Cone Quantization*, Phys. Lett. **B435** (1998) 189.
- [150] A.S. MÜLLER, *The Non-Perturbative Structure of the Constraint Zero Mode in the Tube Model*, in Vorbereitung.
- [151] K.G. WILSON, T.S. WALHOUT, A. HARINDRANATH, W.-M. ZHANG, R.J. PERRY, AND S.D. GLAZEK, *Nonperturbative QCD: A Weak Coupling Treatment on the Light Front*, Phys. Rev. **D49** (1994) 6720.
- [152] H.-C. PAULI, R.M. BAYER, *Towards Solving QCD in Light-Cone Quantization: The Spectrum of the Transverse Zero Modes for SU(2)*, Phys. Rev. **D53** (1996) 939.
- [153] A.V. DUNAEVSKIY, unveröffentlicht.
- [154] B. VAN DE SANDE, M. BURKARDT, *Tube Model for Light-Front QCD*, Phys. Rev. **D53** (1996) 4628.
- [155] T. SCHÄFER, E.V. SHURYAK, *Glueballs and Instantons*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1707.
- [156] W. HEISENBERG, *Physik und Philosophie*, Ullsteinbücher, Band 2 (1968) S. 133.
- [157] S. MANDELSTAM, *Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rep. **23C** (1975) 245.

- [158] E. WITTEN, *Some Exact Multi-Instanton Solutions of Classical Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett **38** (1977) 121.
- [159] G. 'T HOOFT, unpublished (1976).
- [160] R. JACKIW, C. NOHL, C. REBBI, *Conformal Properties of Pseudoparticle Configurations*, Phys. Rev. **D15** (1977) 1642.
- [161] M.M ANSOURIAN, F.R. ORE, JR., *Pseudoparticle Solutions on the $O(5, 1)$ Light-Cone*, Phys. Rev. **D16** (1977) 2662.
- [162] W.I. SMIRNOW, *Die Integraldarstellung der Gammafunktion*, Lehrbuch der höheren Mathematik, Teil III/2, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1995) 219-223.

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Andreas Schäfer für die bereitwillige und herzliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe an der Universität Regensburg, für das Interesse an meiner Arbeit und die sorgsame Durchsicht und Korrektur des Textes.

Bei Herrn Prof. Dr. Ernst Werner bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferates.

Besonderer Dank gebührt meinem Vater, der mir aufgrund unserer zahlreichen Gespräche die Inspiration gab, Polarisationsseigenschaften in der starken Wechselwirkung im *colour flux tube model* auf dem Lichtkegel zu formulieren. Zudem danke ich meinen Eltern für die moralische und finanzielle Unterstützung meiner Dissertation zu einer Zeit, da ich sie am nötigsten brauchte, und für die Durchsicht und Korrektur der Arbeit.

Dank für die zahlreichen ermutigenden Worte, die mir geholfen haben, meine Dissertation zum Abschluß zu bringen, möchte ich auch meinen Geschwistern und Freunden und besonders meinem Freund, meinem Begleiter durch innere und äußere Zeiten, aussprechen.